

THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Roger DAVID

Ingénieur I.D.N.

ETUDE DES SYSTÈMES A MODULATION DE LARGEUR
ET
CONSTANTE DE TEMPS VARIABLE

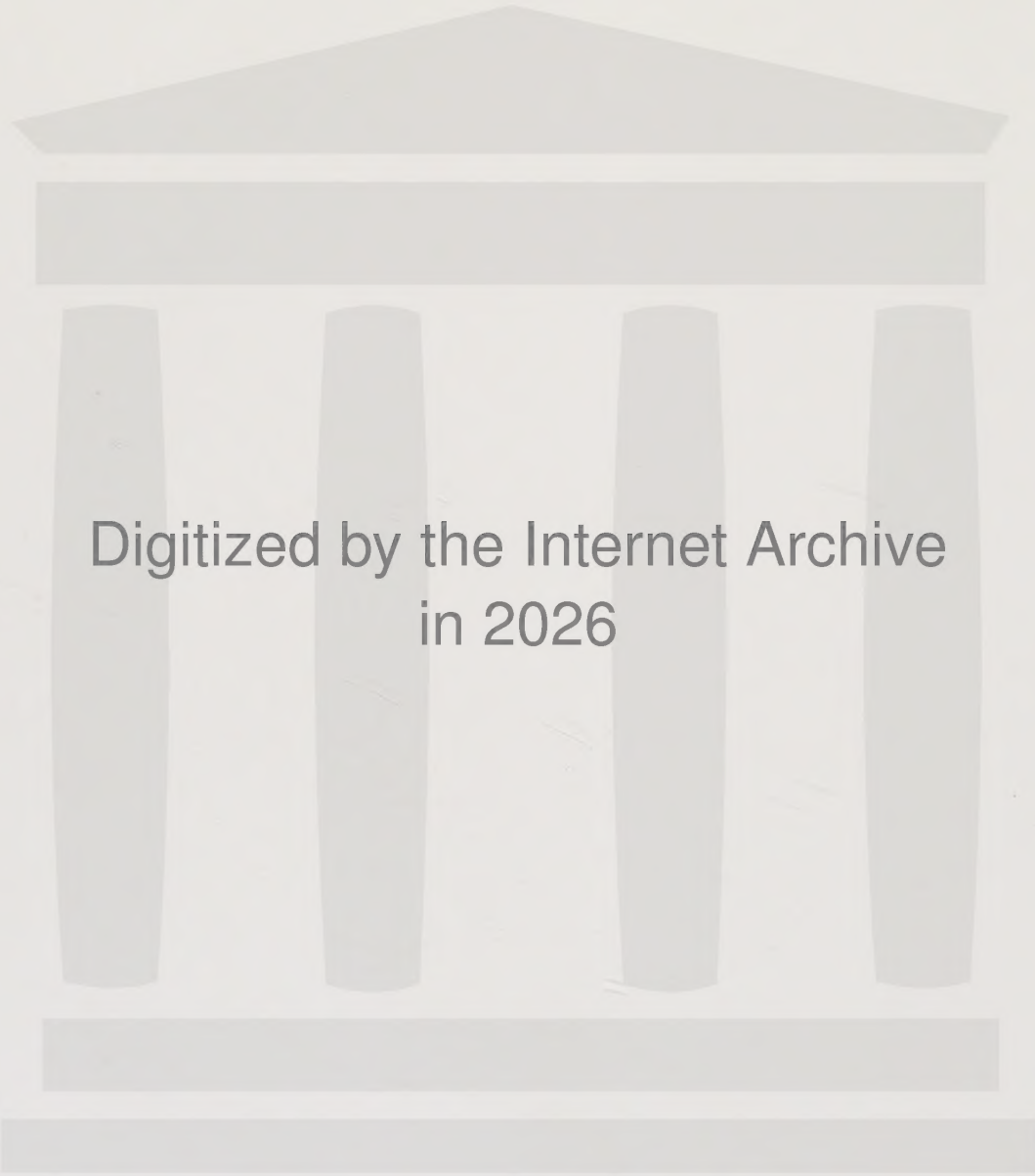
Thèse soutenue le 28 Septembre 1970 devant la Commission d'Examen

Monsieur A. BLAQUIERE, Président

Monsieur P. VIDAL, Rapporteur

Monsieur R. BONNEFILLE, Examineur

Monsieur F. LAURENT, Examineur



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550210_0003

THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Roger DAVID

Ingénieur I.D.N.

ETUDE DES SYSTÈMES A MODULATION DE LARGEUR
ET
CONSTANTE DE TEMPS VARIABLE

Thèse soutenue le 28 Septembre 1970 devant la Commission d'Examen

Monsieur A. BLAQUIERE, Président

Monsieur P. VIDAL, Rapporteur

Monsieur R. BONNEFILLE, Examinateur

Monsieur F. LAURENT, Examinateur

THESE

1871

UNIVERSITEIT VAN LEIDEN

1871

1871

1871

1871

1871



UNIVERSITEIT VAN LEIDEN

UNIVERSITEIT VAN LEIDEN

UNIVERSITEIT VAN LEIDEN

UNIVERSITEIT VAN LEIDEN

UNIVERSITEIT VAN LEIDEN

UNIVERSITEIT VAN LEIDEN

UNIVERSITEIT VAN LEIDEN

Cette étude a été effectuée au Laboratoire de Génie Electrique de la Faculté des Sciences de Paris où Monsieur le Professeur OLMER, à qui nous exprimons toute notre gratitude, a bien voulu nous accueillir.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur BLAQUIERE qui nous a fait l'honneur de s'intéresser à nos travaux et d'accepter la présidence du jury.

Nous tenons à assurer de notre profonde gratitude Monsieur le Professeur VIDAL qui nous a suivi et guidé durant toute cette étude avec intérêt et sympathie.

Nous sommes reconnaissant à Monsieur le Professeur BONNEFILLE pour l'accueil qu'il nous a réservé et la bienveillance avec laquelle il a considéré nos travaux.

A Monsieur LAURENT, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille, nous tenons à dire combien nous avons apprécié les conseils qu'il nous a prodigués.

Enfin nous rendons hommage à l'ensemble de nos camarades du L.G.E.P., chercheurs et techniciens, et plus particulièrement à Messieurs LEFEVRE, CHEVALLIER et QUICHAUD, MELIN et TOULOTTE, SIRET et MICHAÏLESCO dont la cordialité et l'esprit d'équipe nous ont permis de mener à bien cette étude.

INTRODUCTION GENERALE

Les travaux que nous allons présenter s'inscrivent dans le cadre des recherches entreprises au Laboratoire de Génie Electrique de la Faculté des Sciences de Paris en collaboration avec le Laboratoire d'Automatique de la Faculté des Sciences de Lille. Les études effectuées apportent une contribution à l'analyse et à la simulation des systèmes discrets non linéaires en régime dynamique.

Ce travail concerne la classe des systèmes à modulation de largeur des impulsions et constante de temps fonction de la présence des impulsions à la sortie du modulateur. C'est le cas des processus thermiques, par exemple, dont la dynamique dissymétrique est due à la localisation distincte des sources chaudes et froides et pour lesquels on doit tenir compte d'une constante de temps différente à l'échauffement et au refroidissement, c'est également le cas de la régulation par relais des moteurs à flux constant commandés par l'induit ; la variation d'impédance de la source lorsque le moteur est commandé ou non se traduit dans la fonction de transfert par une constante de temps variable.

Ce travail est basé sur des résultats généraux^s présentés dans l'espace de BANACH [6], et sur une méthode d'analyse de la convergence uniforme de l'erreur d'un système [9]. Dans chaque étude effectuée l'accent est mis sur la discussion, en fonction des paramètres, des contraintes imposées.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à un rappel des différents types d'actionneurs à modulation de largeur et à la présentation de la classe de systèmes étudiée.

Le troisième chapitre présente deux méthodes d'analyse de la stabilité et du régime transitoire des systèmes discrets non linéaires s'adaptant particulièrement bien aux systèmes décrits.

Dans le quatrième et le cinquième chapitre on développe les méthodes précédentes en les appliquant à des systèmes d'ordre un et deux et en choisissant dans chaque cas des variables et des paramètres normalisés.

Enfin dans le sixième chapitre on aborde le problème du tracé automatique, sur calculatrice analogique à logique incorporée, des domaines de stabilité présentés.

NOTATIONS

---:---:---:---:---:---:---:---

Dans ce qui suit nous noterons :

T_e	: période d'échantillonnage
ε_o	: seuil de saturation du modulateur
$A(a)$	: amplitude (réduite) des impulsions
$T_1(t_1)$	: constante de temps (réduite) à la charge
$T_2(mt_1)$	: constante de temps (réduite) à la décharge
f_n	: valeur de f à l'instant $n T_e$
$\varepsilon_n(e_n \text{ ou } x_n)$	: erreur (réduite)
y_n	: vitesse réduite
u	: commande issue du modulateur
$\subset$	: symbole d'inclusion
$\in$	: symbole d'appartenance

CHAPITRE I

Les actionneurs à modulation de durée des impulsions

1.1. INTRODUCTION

Les systèmes asservis à modulation de durée des impulsions (P.W.M. : pulse width modulation) sont largement utilisés en électronique pour les asservissements de position et commencent à l'être dans le domaine de la conversion de puissance et du traitement de l'information. Une des raisons principales de l'intérêt croissant des systèmes à modulation de durée est leur aptitude à la régulation des dispositifs de grande puissance.

Utilisé depuis longtemps, puisqu'en 1897 M. GOUY [1] contrôla la température d'un four de raffinage de métaux par des impulsions de durée modulée, ce type de régulateur prit de l'extension avec le démarrage de la conquête de l'espace et l'utilisation de thyristors et de triacs dans les circuits de commande automatique.

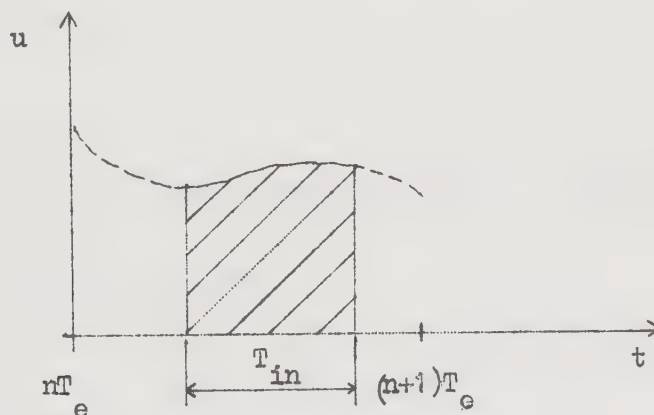
Pour ces raisons le problème de l'analyse de la stabilité des asservissements à modulation de durée est d'une importance considérable. Notre but est de présenter quelques résultats dans ce domaine lorsque ce type de modulateur règle un dispositif dont une constante de temps est fonction du signal de commande.

Il existe de nombreux actionneurs à modulation de durée (ou de largeur) des impulsions, après avoir défini la modulation de durée, nous donnerons quelques exemples de modulateurs et comparerons les avantages et les inconvénients de ces régulateurs.

1.2. DEFINITION D'UN MODULATEUR DE LARGEUR

Entre l'instant nT_e et l'instant $(n+1)T_e$ le modulateur élabore une impulsion d'amplitude $A(|\varepsilon_n|, t)$ nulle dans tout l'intervalle d'échantillonnage, sauf pendant un temps T_{in} fonction de $|\varepsilon_n|$ où cette amplitude est une fonction de la période T_e . Le signe de l'impulsion dépend du signe de l'erreur à l'instant nT_e .

fig. 1.1.



1.3. EXEMPLES DE MODULATEURS

Chaque type de modulateur est caractérisé par sa loi d'amplitude $A(|\varepsilon_n|, t)$ et la loi liant la durée T_{in} de l'impulsion à l'erreur échantillonnée.

Sans prétendre donner une liste complète des nombreux types de modulateurs utilisés citons :

1.3.1. Modulation de durée d'impulsions calibrées commandées à l'extinction

Les impulsions d'amplitude $A \operatorname{sig} \varepsilon_n$ (A constante positive) sont calées au début de la période d'échantillonnage et leur durée T_{in} inférieure à T_e est généralement proportionnelle au module de l'erreur échantillonnée.

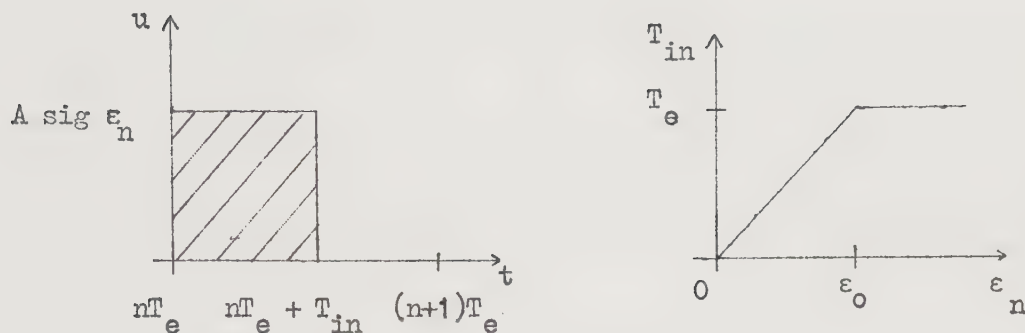


fig. 1.2

Dans le cas où T_{in} est proportionnel au module de l'erreur on pose :

$$T_{in} : T_e \text{ sat } \frac{|\epsilon_n|}{\epsilon_0}$$

$$\text{avec sat } x = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1.3.2. Modulation de durée d'impulsions calibrées commandées à l'amorçage

Les impulsions d'amplitude $A \text{ sig } \epsilon_n$ (A constante) sont calées à la fin de la séquence d'échantillonnage. Ce type de commande est représenté sur la figure 1.3. :

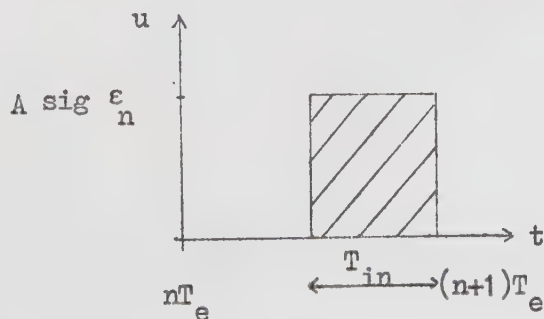


fig. 1.3

1.3.3. Modulation de durée d'arches de sinusoides commandées à l'amorçage

Dans les systèmes commandés au moyen de redresseurs contrôlés (thyristors par exemple) à partir d'une source alternative la commande $u(t)$ se présente fréquemment (charges non réactives) comme ci-dessous :

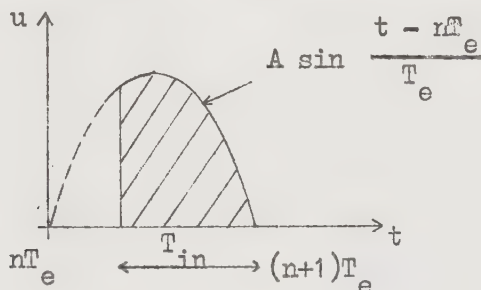


fig. 1.4

REMARQUE : Les trois types d'actionneurs précédemment cités sont les plus utilisés mais on peut ajouter les modulateurs suivants qui en constituent une généralisation.

1.3.4. Modulation de la durée d'une suite d'impulsions

Le modulateur délivre une suite de m impulsions également réparties dans la période d'échantillonnage et de durée $T_{in} \leq \frac{T_e}{m}$.

Ce type de modulateur est une généralisation des trois premiers modulateurs et notamment du troisième lorsque la période d'échantillonnage est un multiple de la période de la source utilisée pour élaborer les impulsions.

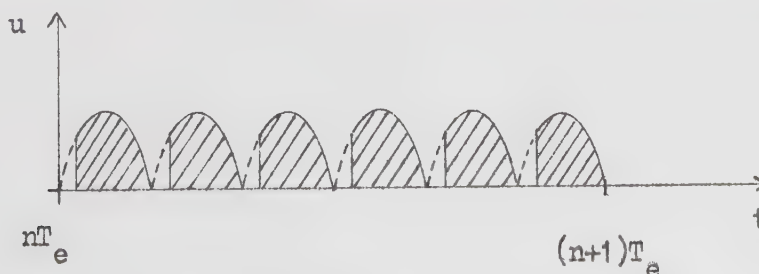


fig. 1.5

1.3.5. Modulation de durée à double signe des impulsions

Le signal issu du modulateur change de signe au bout d'une durée fonction de l'erreur. Le comportement du modulateur en fonction du niveau d'erreur est représenté sur la figure 1.6. :

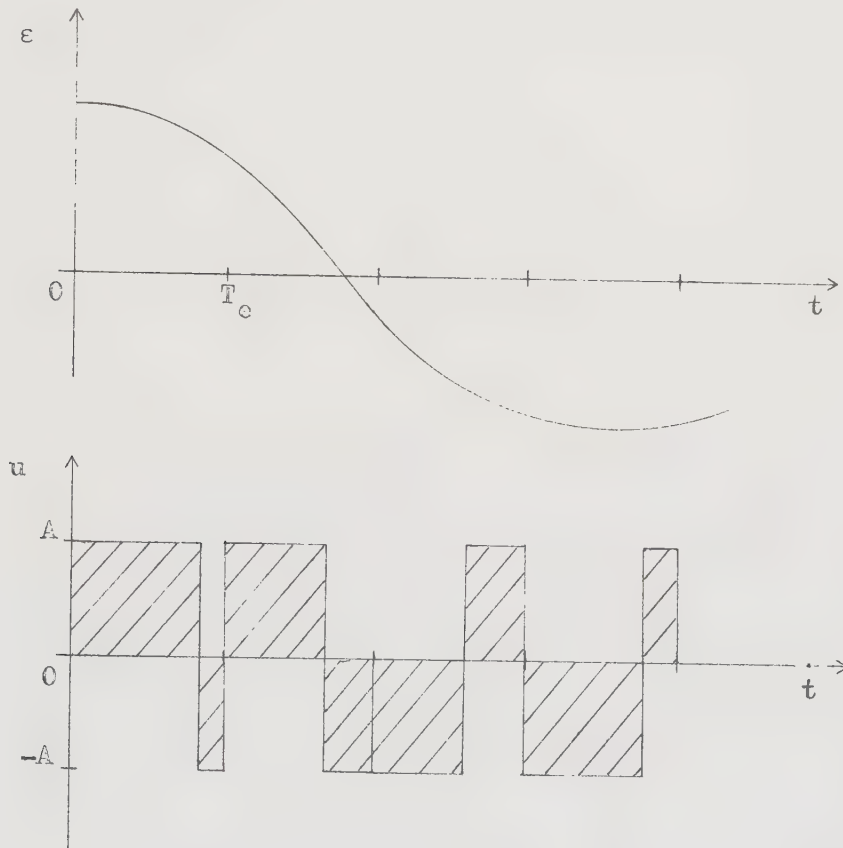


fig. 1.6

Utilisé dans les asservissements hydrauliques ce type de modulateur a l'inconvénient de faire apparaître des cycles limites, en effet la contribution de la régulation ne peut s'annuler que pour des filtres à régler très particuliers.

1.3.6. Modulation de la durée d'impulsions calibrées commandées symétriquement

Les impulsions sont calées au milieu de la période d'échantillonnage. L'amplitude est non nulle pour : $nT_e + \frac{T_e - T_{in}}{2} \leq t < nT_e + \frac{T_e + T_{in}}{2}$

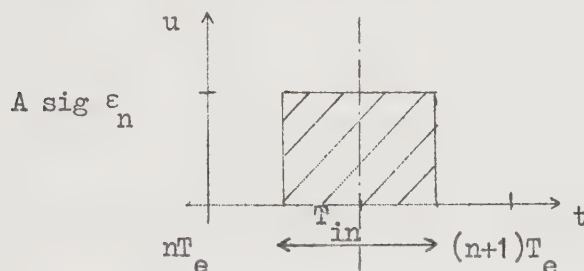


fig. 1.7

1.3.7. Double modulation de durée et d'amplitude des impulsions

Ce type de modulation est très intéressant car il permet de transmettre deux types d'informations en modulant soit la largeur soit l'amplitude de l'impulsion. On peut, en effet, concevoir un modulateur dont la durée des impulsions est proportionnelle au module de l'erreur échantillonnée et l'amplitude proportionnelle à la dérivée de l'erreur prise aux instants d'échantillonnage.

La grandeur de commande $u(t)$ a dans le cas envisagé ci-dessus l'allure représentée sur la figure :

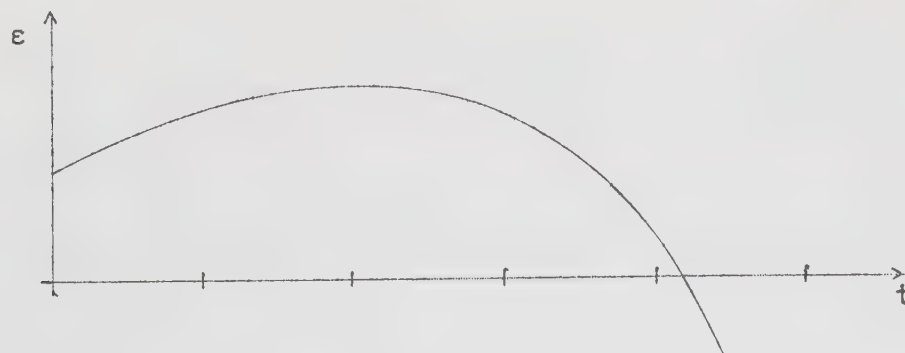


fig. 1.8

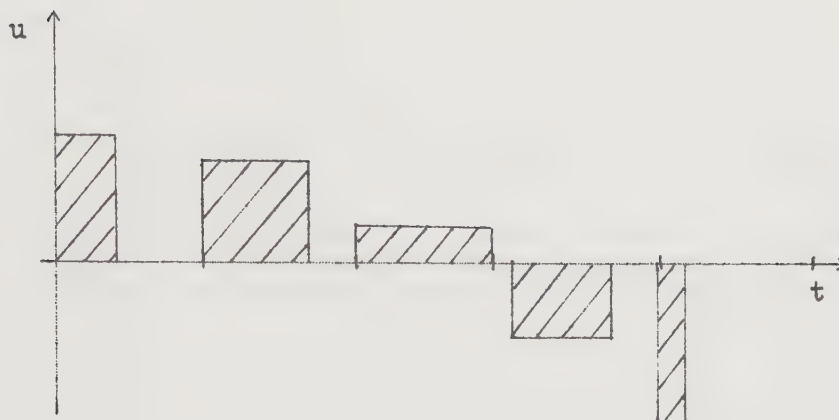


fig. 1.8

1.4. CONCLUSION

Ces modulateurs peuvent être munis de lois de durée différentes (loi non linéaire, quantification) ou de caractéristiques d'amplitude dissymétriques (impulsions de signe constant par exemple), ils possèdent deux types de non linéarité en commun : non linéarité inhérente au modulateur, non linéarité due à la saturation.

Leurs avantages sont nombreux :

- Faible coût de réalisation.
- Obtention aisée d'une grande puissance de commande grâce à l'utilisation de relais.
- Fiabilité.
- Insensibilité aux bruits.
- Les paramètres de réglage (amplitude, seuil de saturation) sont facilement accessibles et l'on peut ainsi limiter les contraintes mécaniques de l'organe asservi.
- Pas de perte de puissance dans des éléments passifs comme avec la régulation échantillonnée bloquée grâce au signal de commande du type "tout ou rien".

Leurs inconvénients sont spécifiques :

- Il est difficile en pratique d'éliminer l'oscillation locale.
Lorsqu'aux faibles valeurs de l'erreur les impulsions de commande n'ont pas une largeur pratiquement nulle la stabilité locale n'est pas obtenue. Ce défaut technique est aisément compensé par l'introduction d'un seuil.
- Une régulation du type "tout ou rien" ne convient pas toujours à un processus craignant les transitoires trop rapides.
- La prévision de la stabilité de ces systèmes est délicate et demande une étude théorique difficile.

CHAPITRE II

Description de la classe de systèmes étudiée

2.1. INTRODUCTION

L'absence de théorie générale (on dispose simplement d'un recueil de méthodes relatives à des cas types) conduit à envisager une approche appliquée qui consiste à analyser un processus particulier. Dans la mesure où le processus choisi est suffisamment répandu l'étude garde un caractère général et son utilité pratique est certaine.

La classe de systèmes étudiée est caractérisée par un actionneur à modulation de durée d'impulsions calibrées commandée à l'extinction et un filtre dont une constante de temps est fonction du signal de commande.

Ces systèmes sont régis par une équation matricielle de transition dont la partie "évolution de la condition initiale" est non linéaire.

C'est le cas des systèmes dont la structure varie avec la commande et des systèmes dont les équations caractéristiques tiennent compte de l'état de la source d'énergie (alimentation stabilisée à découpage, redressement, commande de positionnement des barres de graphite dans les réacteurs nucléaires, régulation thermique, commande de moteurs par relais, etc...).

2.2. DESCRIPTION

Le schéma-bloc est celui de la figure 2.1.. Le modulateur représenté élabore des impulsions d'amplitude $A \operatorname{sig} \varepsilon_n$ (A constante positive) calées au début de la période d'échantillonnage et de durée $T_{in} = T_e \operatorname{sat} \frac{|\varepsilon_n|}{\varepsilon_0}$

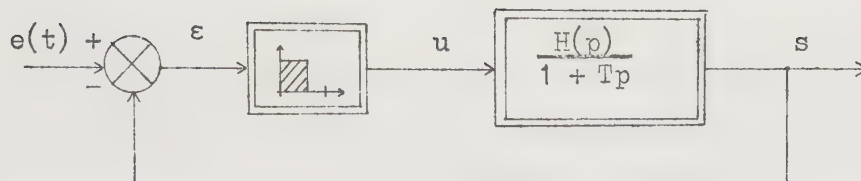


fig. 2.1

Le filtre à régler comporte une constante de temps T fonction du niveau de la commande u :

$$T = T_1 \quad \text{si} \quad u \neq 0$$

2.1.

$$T = T_2 \quad \text{si} \quad u = 0$$

$H(p)$ fonction de transfert dont le degré du dénominateur est supérieur ou égal à celui du numérateur.

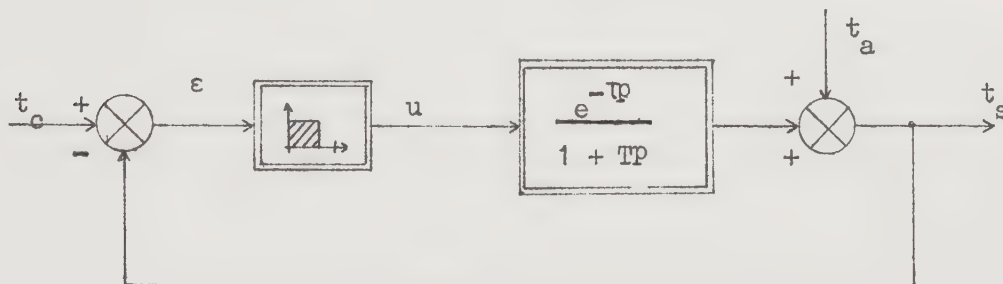
Les systèmes de cette classe se distinguent par la fonction de transfert $H(p)$. Les deux cas les plus intéressants dans la pratique sont ceux des filtres d'ordre un et d'ordre deux.

2.3. EXEMPLES

2.3.1. Régulation de la température d'un processus thermique

On sait depuis longtemps que l'évolution dynamique d'un processus thermique est affectée par le fonctionnement de la source de chaleur. En 1933 [2] STANSEL remarquait que les équations régissant le refroidissement d'un corps différaient de celles régissant son échauffement. En 1938, FREEMANN [3] publie des résultats expérimentaux montrant que les constantes de temps d'un processus thermique sont différentes à l'échauffement et au refroidissement. En effet, la localisation distincte de la source froide et de la source chaude introduit une constante de temps différente dans la phase de régulation (apport ou retrait de chaleur au moyen d'échangeurs) et dans la phase d'équilibre (refroidissement naturel).

Le schéma-bloc du système fait apparaître un filtre du premier ordre avec retard qui, dans une première analyse, est considéré comme négligeable devant la période d'échantillonnage [4] :



- t_a : température ambiante extérieure à l'objet commandé.
- t_c : température de consigne.
- t_s : température à régler.

La constante de temps T est donnée sous forme analytique par la relation 2.1..

2.3.2. Asservissement de la vitesse d'un moteur à courant continu à flux constant commandé par l'induit.

On sait que l'équation différentielle régissant l'évolution d'un moteur à courant continu fait intervenir l'impédance du circuit induit. Lorsque ce type de moteur est commandé par un dispositif du type relais, l'impédance du circuit induit varie. Le moteur commandé est alors caractérisé par une fonction de transfert du type présenté au paragraphe 2.1..

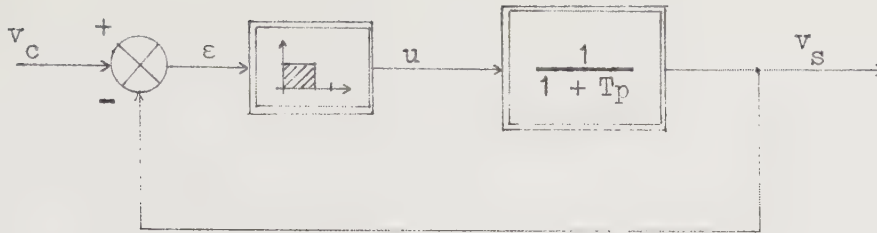


fig. 2.3.

Lors de la phase de régulation ($u \neq 0$) le circuit induit est fermé par un générateur d'impédance interne faible et la constante de temps qui apparaît prend la valeur T_1 . Lors de la phase d'évolution libre ($u = 0$) le circuit induit est ouvert et la constante de temps prend une valeur T_2 très supérieure à T_1 .

REMARQUE : Les deux systèmes précédents sont représentés par des schéma - blocs analogues, leur étude sera donc menée de pair et les résultats obtenus seront valables pour tous les deux.

2.3.3. Régulation de la position d'un moteur à courant continu à flux constant commandé par l'induit

Comme dans l'exemple précédent la constante de temps est fonction de l'état du circuit de commande, la fonction de transfert du moteur comporte une intégration et le schéma-bloc du système étudié est celui de la figure 2.4..

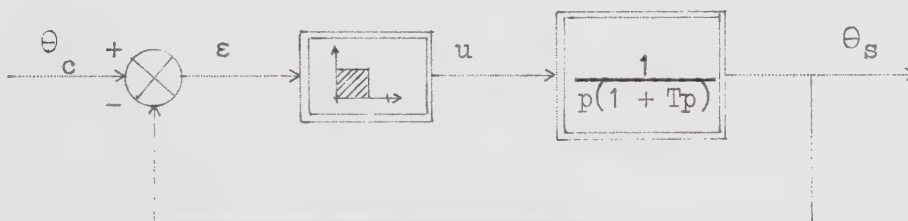


fig. 2.4

2.4. CONCLUSION

Les exemples proposés dans ce chapitre permettent de montrer l'importance de la classe de systèmes étudiée. Il est à remarquer, comme nous le verrons dans les chapitres d'étude, que l'évolution des conditions initiales n'est pas comme dans le cas des filtres linéaires, une fonction linéaire, mais fait intervenir la largeur des impulsions de commande.

La difficulté d'étude de ces systèmes est due à leur triple non linéarité : non linéarité due au type de modulation, non linéarité due à la saturation de la largeur des impulsions, non linéarité inhérente au filtre asservi.

CHAPITRE III

Deux méthodes d'études des systèmes échantillonnés non linéaires

3.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre deux méthodes d'étude du régime dynamique des systèmes échantillonnés non linéaires sont abordées, elles s'adaptent particulièrement bien à l'analyse de la classe de systèmes abordée au chapitre précédent et permettent une vérification aisée des résultats auxquels elles conduisent.

3.2. STABILITE DANS LES ESPACES METRIQUES

La mise en équation des systèmes échantillonnés est particulièrement aisée lorsque l'on caractérise leur évolution au moyen d'une équation de récurrence matricielle [5] liant l'état X_n du système à la séquence n , à son état, à la séquence $n + 1$

$$3.1. \quad X_{n+1} = A_n X_n$$

A_n matrice carrée à coefficients non constants du même ordre que le système étudié. La stabilité asymptotique est obtenue si l'état X_n tend vers le point singulier de l'opération. On suppose ce point singulier ramené à l'origine, seul point d'équilibre de 3.1.

Soit un espace E_m de dimension m muni d'une norme $\| \cdot \|$ scalaire vérifiant les propriétés 3.2. de la distance à l'origine :

$$3.2. \quad \begin{aligned} \| X \| &= 0 \quad \text{équivalent à } X = 0 \\ \| \lambda X \| &= |\lambda| \| X \| \\ \| X + Y \| &\leq \| X \| + \| Y \| \end{aligned} \quad X, Y \in E_m$$

La solution du système décrit par l'équation 3.1. est fonction de la condition initiale X_0 , on dit qu'il y a stabilité asymptotique illimitée lorsque :

$$3.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\| = 0 \quad \forall X_0$$

3.3. CONDITION DE STABILITE, NORME D'UNE MATRICE, CONTRACTION

Une condition suffisante [6] de stabilité illimitée s'obtient en écrivant la décroissance uniforme de $\|X_n\|$ soit :

$$3.4. \quad \|A_n X_n\| < \|X_n\|$$

pour tout instant n et quelle que soit la condition initiale X_0 .

En choisissant pour norme de la matrice A_n l'expression [7] :

$$3.5. \quad \|A_n\| = \max_{X_n} \frac{\|A_n X_n\|}{\|X_n\|}$$

On obtient un scalaire indépendant de X_n vérifiant les trois propriétés fondamentales énoncées plus haut.

"Si $\|A_n\| < 1 - \nu$ ν arbitrairement petit positif, l'opération définie par la matrice A est une contraction et le système possède la stabilité illimitée".

3.4. PREMIERE METHODE : EXEMPLE DE NORME, CRITERE DE STABILITE

Soient a_{ij} les coefficients de la matrice A_n (i indice de ligne) et x_{nj} les composantes du vecteur état X_n ; choisissons pour norme du vecteur X_n l'expression 3.6. :

$$3.6. \quad \sum_{j=1}^m c_j |x_{nj}|$$

les coefficients c_j étant des nombres réels positifs.

L'opération définie par la matrice A_n est une contraction si :

$$\max_{X_n} \frac{\sum_{j=1}^m c_j |x_{n+1j}|}{\sum_{j=1}^m c_j |x_{nj}|} < 1$$

3.7

$$\max_{X_n} \frac{\sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |x_{nj}|}{\sum_{j=1}^m c_j |x_{nj}|} < 1$$

vérifié si :

$$3.8 \quad \max_{X_n} \frac{\sum_{j=1}^m c_j |x_{nj}| \sum_{i=1}^m \left[\frac{c_i}{c_j} |a_{ij}| - 1 \right]}{\sum_{j=1}^m c_j |x_{nj}|} < 0$$

pour que cette somme soit négative il faut que les termes entre crochets ne soient jamais positifs et que l'un au moins soit négatif, ce qui se traduit par les conditions 3.9 et 3.10

$$3.9 \quad \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{c_j} |a_{ij}| - 1 \leq 0 \quad j \neq k$$

il existe une valeur k de j comprise entre 1 et m tel que

$$3.10 \quad \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{c_j} |a_{ik}| - 1 < 0$$

REMARQUE : Le critère de stabilité énoncé ci-dessus est identique au critère proposé en 1960 par R.E. KALMAN et J.E. BERTRAM [8] .

3.5. INTERET DE LA NORME PRESENTEE, DANS LE CAS DU MOTEUR

Lorsque le filtre à régler est un moteur de fonction de transfert

$$3.11 \quad \frac{X}{U} = \frac{1}{p(1 + T_p)}$$

L'évolution du système entre deux instants d'échantillonnage est caractérisé par les équations 3.12 :

$$3.12 \quad \begin{aligned} x_{nT_e + t} &= x_{nT_e} + y_{nT_e} T_e (1 - e^{-\frac{t}{T_e}}) + \alpha(\varepsilon_n, t) \\ y_{nT_e + t} &= y_{nT_e} e^{-\frac{t}{T_e}} + \beta(\varepsilon_n, t) \end{aligned} \quad t < T_e$$

la position x et la vitesse $y = \dot{x}$ sont les composantes du vecteur état,

α et β : les contributions de la régulation à l'instant $nT_e + t$ (T_e période d'échantillonnage) sur la sortie et sa dérivée.

Dans le plan $[x, y]$ des variables de phases l'évolution de la condition initiale X_n est la somme de deux chemins :

I - Evolution libre de la condition initiale sur la droite

$$3.13 \quad x_{nT_e+t} + T y_{nT_e+t} = x_{nT_e} + T y_{nT_e}$$

II - Contribution de la régulation

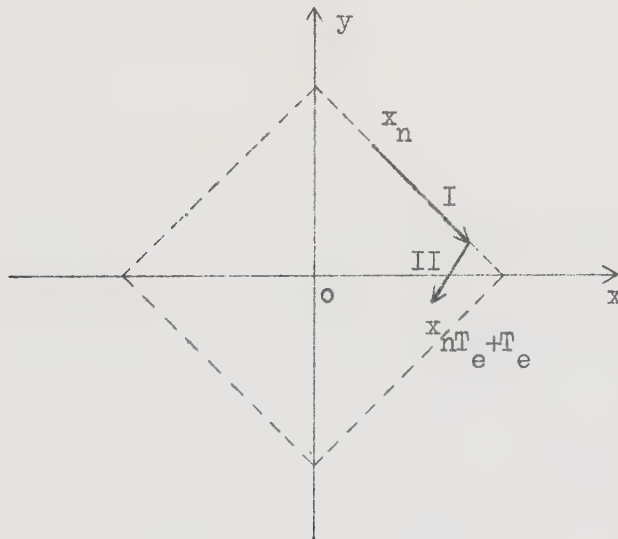


fig. 3.1

Si la norme utilisée est : $\|X_n\| = |x_n| + T|y_n|$.

La condition de contraction traduit directement une contrainte sur la contribution de la régulation. Elle exprime en effet que le point

représentatif de l'état X_{n+1} est situé à l'intérieur du losange

$$|x| + T|y| = \|X_n\| \quad .$$

3.6. SECONDE METHODE : ANALYSE DU REGIME DYNAMIQUE

Une autre méthode [9] se prête particulièrement bien à l'étude du régime dynamique des systèmes échantillonnés non linéaires du second ordre notamment lorsque aucun des coefficients des équations de récurrence régissant l'évolution du système n'est constant.

Soit un système décrit par les équations de récurrence non linéaires [10] :

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n y_n$$

3.14

$$y_{n+1} = c_n x_n + d_n y_n$$

a_n, b_n, c_n, d_n fonctions univoques de $|x_n|$, bornées. L'équilibre en régime autonome est supposé ramené à l'origine des coordonnées.

La méthode permet d'obtenir des contraintes sur les paramètres telles que le système étudié ait un comportement dynamique sans dépassement de la position d'équilibre et une durée de convergence finie.

On définit la durée de convergence à $\beta \%$ près de la variable x_n comme le nombre α de séquences d'échantillonnage au bout desquelles la variable x_n de valeur initiale x_0 ne s'éloigne plus de sa valeur à l'équilibre de $\pm \frac{\beta}{100} x_0$.

Une condition suffisante est :

$$3.15 \quad \begin{aligned} |x_{n+1}| &< x_n \\ \lambda^\alpha &\leq \frac{\beta}{100} \end{aligned}$$

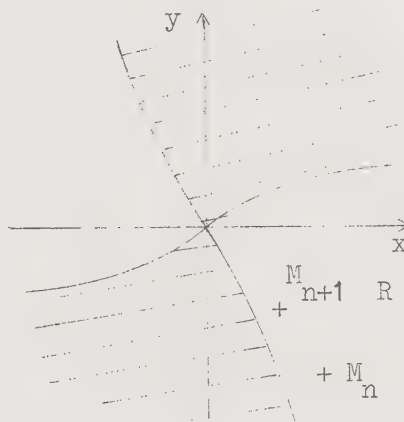
L'absence de dépassement exige l'invariance du signe de x_n soit x_n et x_{n+1} positifs par exemple.

Il est facile de déduire du système d'équation 3.1 une région R du plan de phase discret où ces conditions sont satisfaites.

$$3.16 \quad -\frac{a_n}{b_n} x_n < y_n < \frac{\lambda - a_n}{b_n} x_n$$

$$b_n > 0$$

fig. 3.2.



Supposons qu'à l'instant n le point M_n représentatif de l'état X_n du système appartienne à un domaine D inclus dans R . Ecrivons qu'à l'instant $n+1$ le point M_{n+1} appartient également à D :

Si D inclus dans R est défini par :

$$3.17 \quad -u_n x_n < y_n < -v_n x_n$$

$$u_n \leq \frac{a_n}{b_n}, \quad v_n \geq -\frac{\lambda - a_n}{b_n}$$

à l'instant $n+1$:

$$3.18 \quad -u_{n+1} x_{n+1} < y_{n+1} < -v_{n+1} x_{n+1}$$

Or $x_{n+1} < x_n$ donc si u_n est une fonction décroissante de x_n et v_n une fonction croissante de x_n la relation :

$$3.19 \quad -u_n x_{n+1} < y_{n+1} < -v_n x_{n+1}$$

suffit pour que 3.18 soit vérifiée

L'utilisation des relations 3.1 et 3.19 conduit après une longue suite de calculs exposés dans l'annexe I aux conditions suffisantes suivantes :

$$3.20 \quad \begin{aligned} u_n^2 b_n + (d_n - a_n) u_n - c_n &< 0 & u_n > 0 & d_n > 0 \\ v_n^2 b_n + (d_n - a_n) v_n - c_n &> 0 & a_n d_n - b_n c_n &> 0 \end{aligned}$$

Le choix des fonctions u_n et v_n permet alors de déterminer un domaine D assurant stabilité, temps de réponse et régime dynamique fixé à un système échantillonné non linéaire du second ordre.

Le domaine trouvé pour $x_n > 0$ s'étend sans difficulté à $x_n < 0$ grâce à une symétrie par rapport à l'origine.

3.7. CONCLUSION

Les deux méthodes exposées plus haut permettent une discussion aisée dans le plan des paramètres et c'est ce qui les rend importantes. Leur application aux systèmes, décrits dans le chapitre précédent, conduit à des domaines de valeurs des paramètres où ces systèmes ont un comportement dynamique connu.

C H A P I T R E I V

A n a l y s e d e s s y s t è m e s d u p r e m i e r o r d r e

4.1. I N T R O D U C T I O N

Les processus thermiques, par exemple, qui par leur dynamique dyssimétrique (localisation distincte entre la source chaude et la source froide) engendrent des régimes transitoires d'échauffement et de refroidissement différents, justifient à eux seuls l'étude menée dans ce chapitre.

Après un bref rappel de la représentation utilisée nous développerons l'étude de la stabilité et du temps de réponse en faisant intervenir des variables d'états et des paramètres normalisés.

4.2. R A P P E L D E L A R E P R E S E N T A T I O N U T I L I S E E

Le schéma-bloc équivalent au système étudié est celui de la figure 4.1 :

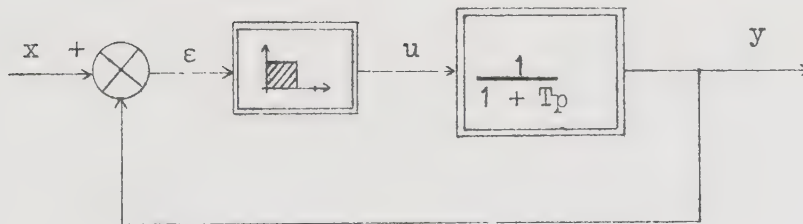


fig. 4.1.

L'élément à régler est un filtre non linéaire du premier ordre dont la constante de temps T est donnée sous forme analytique par la relation 4.1. :

$$4.1 \quad \begin{aligned} T &= T_1 & \text{si} & \quad u \neq 0 & \quad (\text{charge}) \\ T &= T_2 & \text{si} & \quad u = 0 & \quad (\text{décharge}) \end{aligned}$$

La chaîne d'action comporte un modulateur de durée dont les caractéristiques sont

$$4.2 \quad u(t) = \begin{cases} A \operatorname{sig}(\varepsilon_n) & \text{pour } nT_e \leq t < nT_e + T_{in} \\ 0 & \text{pour } nT_e + T_{in} \leq t < (n+1)T_e \end{cases}$$

La durée T_{in} de l'impulsion reste inférieure ou égale à la période d'échantillonnage T_e :

$$4.3 \quad T_{in} = T_e \operatorname{sat} \frac{|\varepsilon_n|}{\varepsilon_0} \quad \text{avec } \operatorname{sat} y = \begin{cases} y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

ε_0 est le seuil de saturation du modulateur.

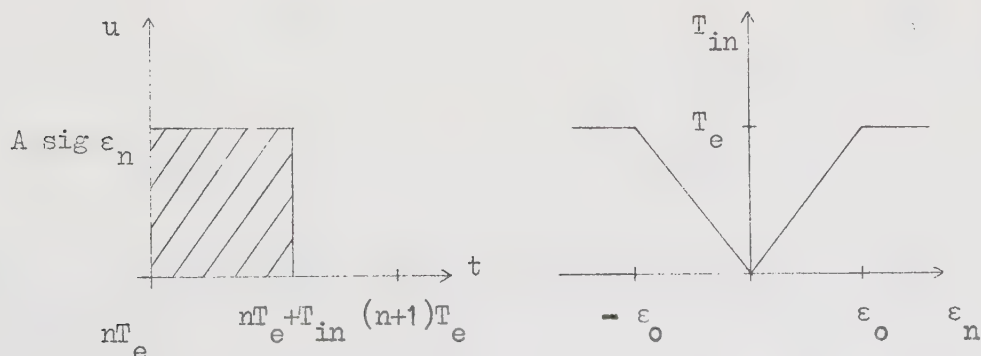


fig. 4.2

Ce système contient trois types de non linéarité : non linéarité inhérente au filtre, saturation de la largeur de l'impulsion, non linéarité relative au mode de régulation. Il convient donc de chercher deux équations aux différences finies régissant le système selon son état de saturation.

4.3. MISE EN EQUATION

4.3.1. Modulateur non saturé

Supposons le module de l'erreur échantillonnée inférieur au seuil de saturation du modulateur : $|\epsilon_n| < \epsilon_0$.

Durant une séquence d'échantillonnage la réponse y_{nT+t} du filtre à la commande $u(t)$ s'exprime par les relations 4.3 :

$$\begin{aligned}
 0 < t < T_{in} \quad y_{nT+t} &= y_n e^{-\frac{t}{T_1}} + A \operatorname{sig} \epsilon_n (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \\
 T_{in} < t < T_e \quad y_{nT+t} &= y_{nT+T_{in}} e^{-\frac{t - T_{in}}{T_2}}
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

ce qui conduit pour $t = T_e$ en tenant compte de l'expression de la régulation $\epsilon_n = x_n - y_n$ à l'équation aux différences 4.4 :

$$\begin{aligned}
 4.4 \quad \epsilon_{n+1} - \epsilon_n e^{-\frac{T_e}{T_2} - T_{in}(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})} &+ A \operatorname{sig} \epsilon_n (1 - e^{-\frac{T_{in}}{T_1}}) e^{-\frac{T_e - T_{in}}{T_2}} \\
 &= x_{n+1} - x_n e^{-\frac{T_e}{T_2} - T_{in}(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})}
 \end{aligned}$$

où l'on constate la présence des cinq paramètres T_1 , T_2 , T_e , A et ϵ_0 (dans T_{in}).

4.3.2. Modulateur saturé

Lorsque le module de l'erreur est supérieur au seuil de saturation du modulateur la largeur T_{in} de l'impulsion prend la valeur T_e . L'équation de récurrence devient 4.5 :

$$4.5 \quad \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n e^{-\frac{T_e}{T_1}} + A \operatorname{sig} \varepsilon_n (1 - e^{-\frac{T_e}{T_1}}) = x_{n+1} - x_n e^{-\frac{T_e}{T_1}}$$

équation en tout point identique à celle obtenue pour un filtre à constante de temps invariable.

4.4. CHOIX DE VARIABLES NORMALISEES

Pour rendre les calculs homogènes, afin de réduire au minimum le nombre de paramètres il est commode de poser :

$$\frac{T_1}{T_e} = t_1 \quad \frac{T_2}{T_1} = m \quad a = \frac{A}{\varepsilon_0}$$

4.6

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} = e_n \quad \frac{e_n}{\varepsilon_0} = x_n$$

L'équation caractéristique devient alors en régime saturé

$$(|e_n| \leq 1)$$

$$4.7 \quad e_{n+1} = e_n \left[-e^{-\frac{1}{mt_1}} [1 + |e_n| (m-1)] + \frac{a}{|e_n|} (1 - e^{-\frac{|e_n|}{t_1}}) e^{-\frac{1 - |e_n|}{mt_1}} \right]$$

$$= x_{n+1} - x_n e^{-\frac{1}{mt_1}} [1 + |e_n| (m-1)]$$

et en régime non saturé ($|e_n| \geq 1$) :

$$4.8 \quad e_{n+1} + e_n \left[-e^{-\frac{1}{t_1}} + \frac{a}{|e_n|} (1 - e^{-\frac{1}{t_1}}) \right] = x_{n+1} - x_n e^{-\frac{1}{t_1}}$$

4.5. ETUDE DE LA STABILITE ASYMPTOTIQUE DU REGIME AUTONOME

4.5.1. Introduction

La supposition $s = 0$ conduit à l'analyse du comportement du système en régulateur. L'étude en régime non autonome est abordée par la suite.

Cette étude est menée en deux étapes correspondant à l'état de saturation du modulateur. Les caractéristiques du domaine de stabilité asymptotique sont d'abord établies en fonction des valeurs prises par les paramètres t_1 et m , puis une étude simplifiée, lorsque m est grand, est présentée.

Le critère de stabilité asymptotique utilisé est identique à celui présenté par S. WĘGRZYN et P. VIDAL en 1963 [11] pour les équations de récurrence d'ordre m :

$$4.9 \quad x_{n+m} + f_1 x_{n+m-1} + \dots + f_m x_n = 0$$

La stabilité asymptotique est assurée si la condition suffisante 4.10 est satisfaite :

$$4.10 \quad \forall < 1 - \sum_{i=1}^m |f_i| \quad \forall \text{ arbitrairement petit positif}$$

Pour le système étudié cette condition de stabilité se traduit aisément en imposant au module du coefficient de e_n de rester inférieur à l'unité, elle correspond à la décroissance uniforme du module de l'erreur échantillonnée.

4.5.2. Etude en régime saturé

Le domaine de stabilité asymptotique en régime saturé ($|e_n| > 1$) est défini par l'inégalité :

$$4.11 \quad a < |e_n| \frac{1 + e^{-\frac{1}{T_1}}}{1 - e^{-\frac{1}{T_1}}} = a_1 |e_n|$$

Il est facile de voir que le domaine est limité par deux droites passant par l'origine et de pente $\pm a_1$ (cf. fig. 4.3.)

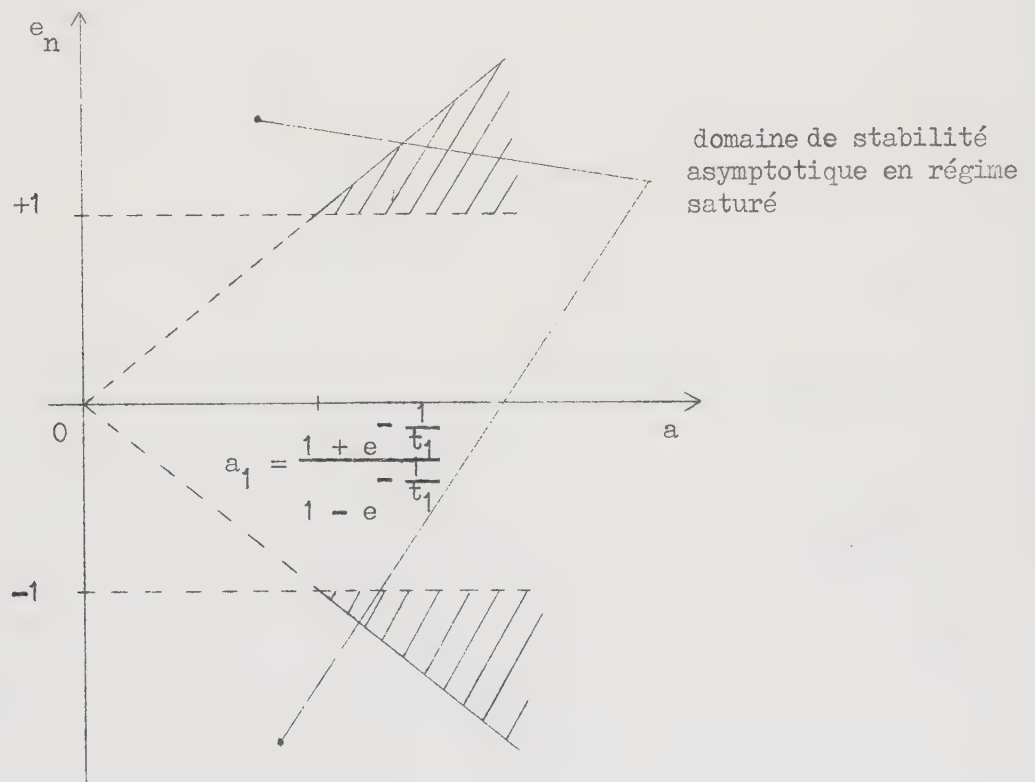


fig. 4.3

Le gain a_1 qui reste toujours supérieur à l'unité est d'autant plus faible que le paramètre $\frac{1}{t_1}$ est grand.

4.5.3. Etude en régime non saturé

La condition de stabilité asymptotique pour $|e_n| < 1$ est donnée par l'expression 4.12 dont la partie gauche est toujours vérifiée :

$$4.12 \quad -1 < -e^{-\frac{1}{mt_1}} \left[1 + |e_n|^{(m-1)} \right] + \frac{a}{|e_n|} \left(1 - e^{-\frac{|e_n|}{t_1}} \right) e^{-\frac{1 - |e_n|}{mt_1}} < 1$$

La stabilité asymptotique en régime non saturé s'exprime alors dans le plan $[a, e_n]$ par :

$$4.13 \quad a < |e_n| \frac{1 + e^{\frac{1}{mt_1}} \left[1 + |e_n|^{(m-1)} \right]}{e^{\frac{|e_n|}{t_1}} - 1}$$

Le domaine défini par la relation 4.13 peut présenter diverses formes selon les valeurs des paramètres t_1 et m .

Une décomposition en éléments simples au voisinage de $e_n = 0$ puis de $|e_n| = 1$ rend commode la détermination de l'allure des domaines.

a) Au voisinage de l'origine

$$4.14 \quad a < a_0 + |e_n| \left[\frac{da}{de_n} \right]_{e_n=0}$$

$$\text{avec } a_0 = t_1 \left(1 + e^{\frac{1}{mt_1}} \right)$$

$$\text{et } \dot{a}_0 = \left[\frac{da}{de_n} \right]_{e_n=0} = -\frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{mt_1}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right]$$

b) Au voisinage de l'unité

$$4.15 \quad a < a_1 + \left[\frac{da}{de_n} \right]_{e_n=1} (e_n - 1)$$

$$\text{avec } a_1 = \frac{1 + e^{-\frac{1}{t_1}}}{1 - e^{-\frac{1}{t_1}}}$$

$$\text{et } \dot{a}_1 = \left[\frac{da}{de_n} \right]_{e_n=1} = \frac{mt_1(1 - e^{-\frac{2}{t_1}}) + e^{-\frac{1}{t_1}}(1 - 2m) - 1}{mt_1(1 - e^{-\frac{1}{t_1}})^2}$$

4.5.4. Formes des domaines en fonction des paramètres

Pour préciser l'allure des domaines il suffit d'étudier dans le plan des paramètres les signes de $\dot{a}_0$, $\dot{a}_1$ et $\dot{a}_0 - \dot{a}_1$.

La discussion en fonction des valeurs de t_1 et mt_1 nécessite un changement de variable approprié qui permet l'obtention aisée des régions définissant ces signes :

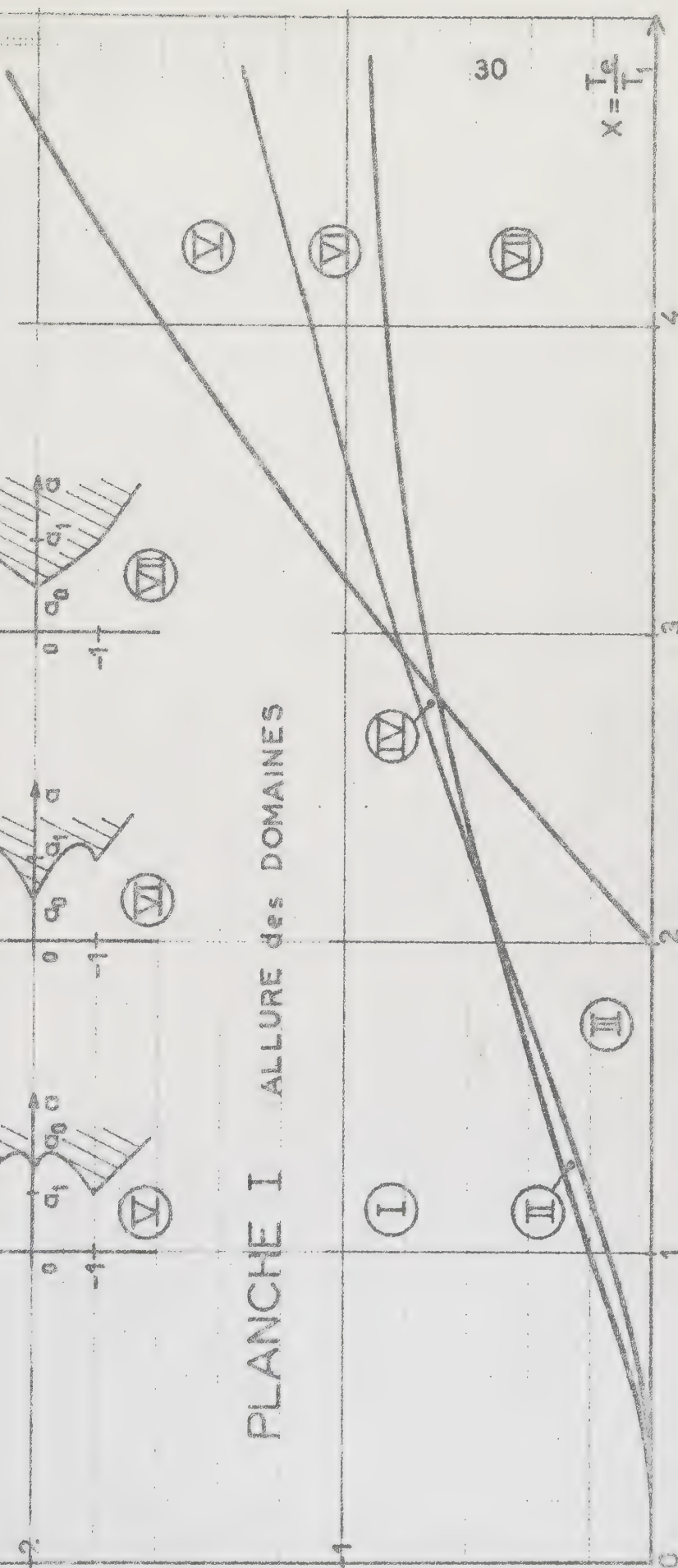
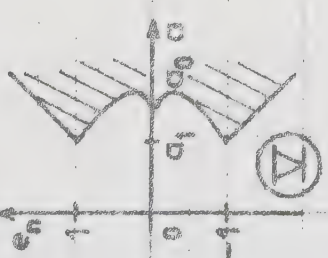
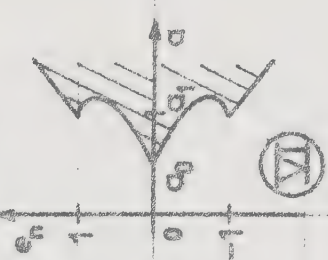
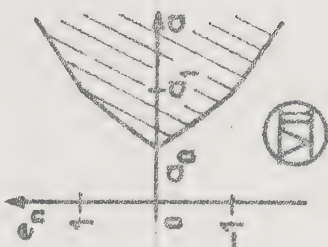
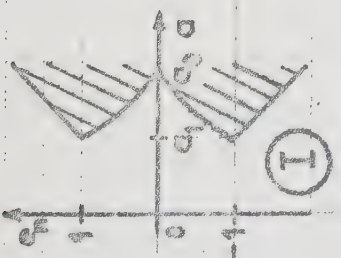
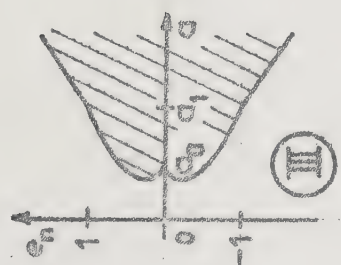
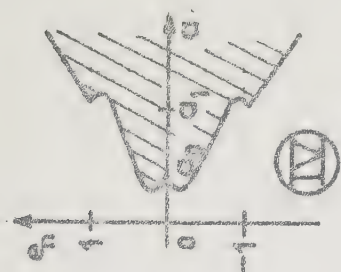
Régions	I	II	III	IV	V	VI	VII
$\dot{a}_0$	-	-	-	-	+	+	+
$\dot{a}_1$	-	+	+	-	-	-	+
$\dot{a}_0 - \dot{a}_1$	+	+	-	-	+	-	-

$$Y = \frac{T_0}{T_2}$$

30

$$X = \frac{T_0}{T_1}$$

PLANCHE I ALLURE des DOMAINES



Si l'on pose $X = \frac{1}{t_1} = \frac{T_e}{T_1}$ et $Y = \frac{1}{mt_1} = \frac{T_e}{T_1}$

On peut alors énoncer les trois conditions suivantes

$$X > \frac{2Y}{1 - e^{-Y}} \quad \text{équivalent à} \quad \dot{a}_0 > 0$$

$$4.16 \quad Y > 2 \frac{\text{sh}X - X}{e^X - 1} \quad \text{équivalent à} \quad \dot{a}_1 < 0$$

$$Y > \text{Log} \left[\frac{X}{\text{th} \frac{X}{2}} - 1 \right] \quad \text{équivalent à} \quad a_0 - a_1 > 0$$

Les trois courbes obtenues divisent le plan $\left[\frac{T_e}{T_1}, \frac{T_e}{T_2} \right]$ en sept régions correspondant chacune à une allure de domaines. Les sept solutions possibles ainsi que les ensembles de valeurs de paramètres correspondants sont représentés sur la planche I.

4.5.5. Conclusion

Le gain réduit a étant fixé les domaines trouvés permettent d'obtenir l'erreur réduite maximum e_n compatible avec la stabilité asymptotique du système. Si le point représentatif M d'abscisse a et d'ordonnée e_n est situé à droite de la frontière l'amplitude de l'erreur diminue. Si le point représentatif M est à gauche de la frontière, le module de l'erreur croît.

Il est facile de voir que les amplitudes des oscillations limites stables sont données par la partie de la frontière des domaines située, lorsque e_n est positif, au-dessus des valeurs instables de l'erreur.

Dans le cas IV par exemple la partie de la frontière donnant des oscillations stables est celle dont le trait est doublé sur la figure 4.4

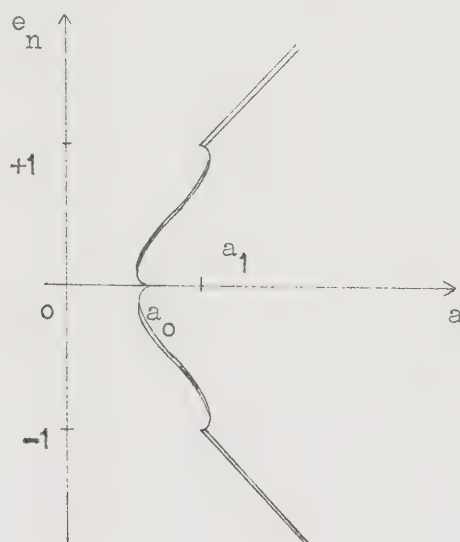


fig. 4.4

Dans tous les cas la frontière du domaine en régime saturé donne des oscillations limites stables.

Il est important de remarquer que ces domaines traduisent exactement la propriété $|e_{n+1}| < |e_n|$ et qu'ils permettent de juger de la stabilité des conditions initiales. Il est aisé de trouver des valeurs du paramètre a et de la condition initiale e_n telles que l'erreur tende vers zéro, il s'agit par exemple des régions où le gain réduit a est inférieur à l'abscisse minimum de la frontière. Une étude très complète de la stabilité des conditions initiales, basée sur la méthode des antécédents [12], a permis de faire apparaître des régions disjointes dans le plan $[a, e_n]$ conduisant à la stabilité des conditions initiales. Cette étude a fait l'objet d'un rapport de stage D.E.A. en 1970 [13].

Les domaines de stabilité des conditions initiales se déduisent des domaines de stabilité par rapport aux valeurs des variables grâce à une transformation géométrique simple et leur allure est la suivante :

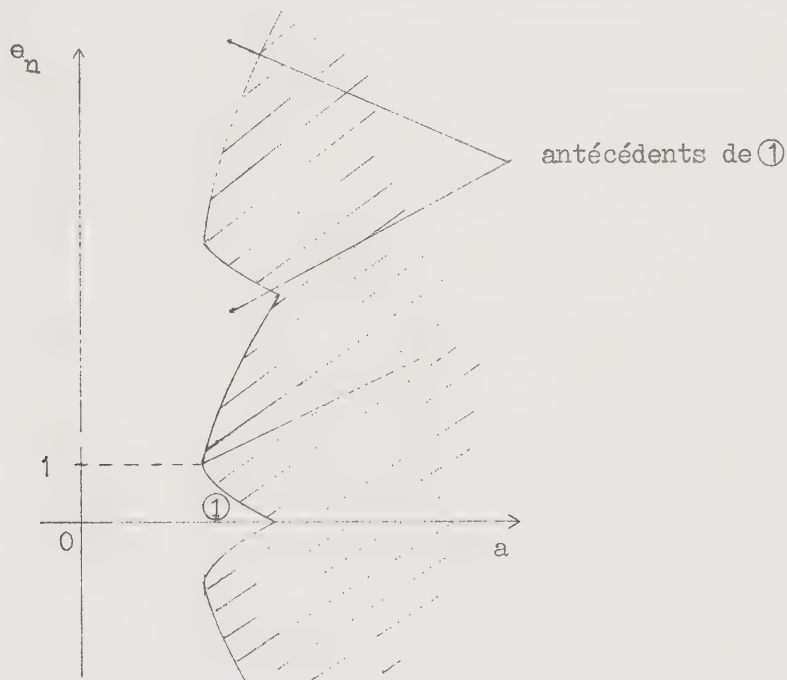


fig. 4.5

L'étude de la transformation donnant un domaine des conditions initiales est faite dans l'annexe II.

4.6. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER IMPORTANT

La constante de temps T_2 de décharge est pour la majorité des systèmes de la classe étudiée supérieure à la constante de temps T_1 de charge. Une simplification importante apparaît lorsque le paramètre m est grand devant l'unité.

Dans ce cas l'expression $e^{\frac{1}{mt_1}} [1 + |e_n| (n-1)]$ est équivalente à $e^{\frac{|e_n|}{t_1}}$ et le domaine de stabilité en régime non saturé est défini par 4.17.

$$4.17 \quad a < |e_n| \frac{\frac{|e_n|}{t_1} + 1}{e^{\frac{|e_n|}{t_1}} - 1}$$

L'étude locale de la frontière donne les valeurs limites du gain réduit :

$$a_0 = 2 t_1 \quad \text{inférieur à la valeur } a_1$$

$$a_1 = \frac{e^{\frac{1}{t_1}} + 1}{e^{\frac{1}{t_1}} - 1}$$

4.18

$$\dot{a}_0 = 0$$

$$\dot{a}_1 = \frac{e^{\frac{2}{t_1}} - 1 - \frac{2}{t_1} e^{\frac{1}{t_1}}}{(e^{\frac{1}{t_1}} - 1)^2}$$

L'allure du domaine correspondant est représentée à la figure 4.6 et appartient au cas VII.

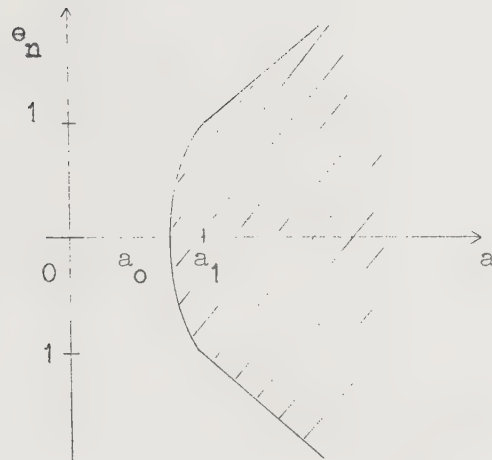


fig. 4.6

Dans ce cas la condition de stabilité illimitée ($a < 2t_1$) coïncide avec la condition de stabilité locale et la condition de stabilité des conditions initiales.

4.7. APPROCHE ALGEBRIQUE DE LA STABILITE EN REGIME NON AUTONOME

L'équation de récurrence du système muni d'une entrée non nulle écrite en 4.7 et 4.8 n'admet pas l'origine ~~pour~~ point d'équilibre et lorsque l'entrée est constante $x_{n+1} = x_n$ l'écriture 4.19 n'est pas une condition de stabilité asymptotique car elle exprime la décroissance absolue de l'erreur vers zéro.

$$4.19 \quad \left| e^{-\frac{1}{mt_1} [1 + |e_n| (m-1)]} - \frac{a}{|e_n|} (1 - e^{-\frac{|e_n|}{t_1}}) e^{-\frac{1 - |e_n|}{mt_1}} + \right. \\ \left. + x_n (1 - e^{-\frac{1}{mt_1} [1 + |e_n| (m-1)]}) \right| < 1$$

Lorsque le paramètre m est très grand (cas fréquent en pratique) l'origine est un point d'équilibre de 4.7 et 4.19 est une condition de stabilité asymptotique. Le domaine où $|e_{n+1}|$ est inférieur à $|e_n|$ est alors défini par les inégalités 4.20 :

$$4.20 \quad x_n \operatorname{sig} e_n - |e_n| < a < |e_n| \frac{e^{\frac{1}{mt_1} [1 + |e_n| (m-1)]}}{\frac{|e_n|}{t_1} - 1} + x_n \operatorname{sig} e_n$$

Les frontières de ce domaine se construisent aisément par translation des frontières des domaines de stabilité du système autonome

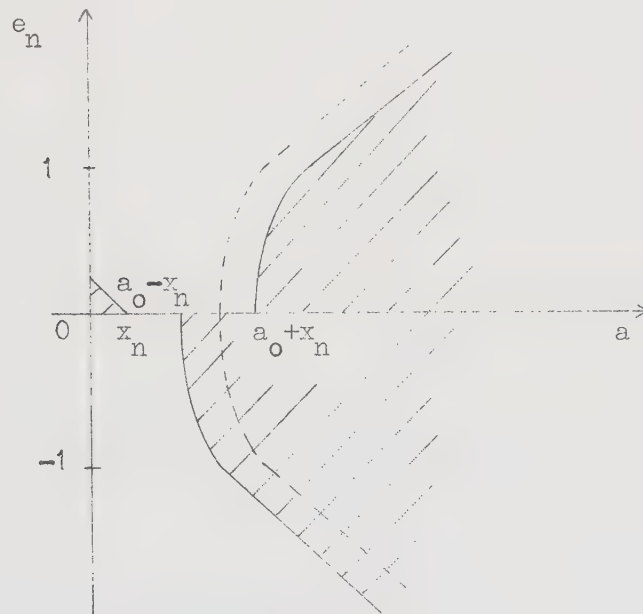


fig. 4.7

La stabilité illimitée est obtenue pour x_n positif lorsque le gain réduit a est compris entre x_n et $a_0 - x_n$.

4.8. ETUDE DU TEMPS DE REPONSE

Le temps de réponse α Te à β % près est défini par 4.20

$$4.20 \quad \left| \frac{\varepsilon_{n+\alpha}}{\varepsilon_n} \right| < \frac{\beta}{100}$$

Une condition suffisante assurant ce temps de réponse est alors :

$$4.21 \quad \left| \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \right| < \frac{1}{r} \quad \text{avec} \quad \frac{\beta}{100} = \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \quad \text{et} \quad r > 1$$

La discussion de la relation 4.21 est menée de façon analogue à celle du paragraphe 4.5 sur la stabilité asymptotique, d'abord en régime saturé puis en régime non saturé.

4.8.1. Régime saturé

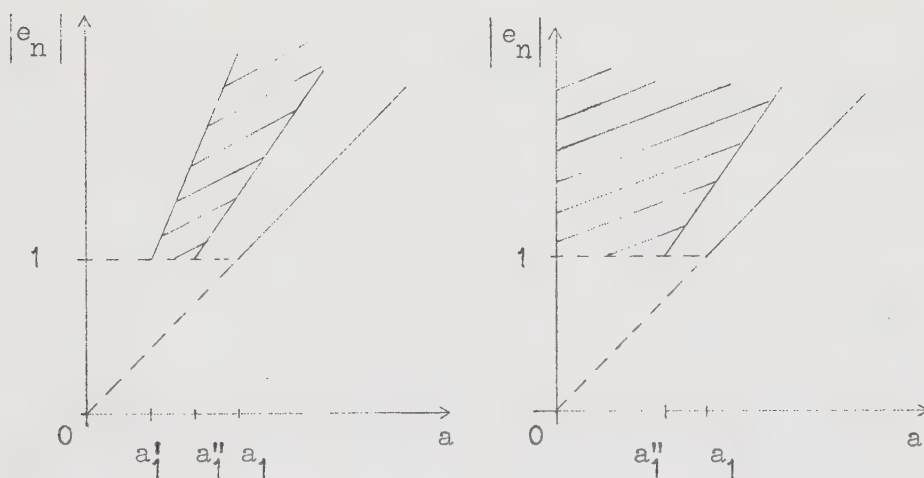
La région du plan $[a, e_n]$ qui satisfait 4.21 est déterminée par :

$$4.22 \quad a_1' |e_n| < a < a_1'' |e_n|$$

avec
$$a_1' = \frac{e^{-\frac{1}{t_1}} - \frac{1}{r}}{1 - e^{-\frac{1}{t_1}}}$$

et
$$a_1'' = \frac{e^{-\frac{1}{t_1}} + \frac{1}{r}}{1 - e^{-\frac{1}{t_1}}}$$

il y a donc deux présentations possibles selon les valeurs de r



temps de réponse $\propto T_e$

fig. 4.8

4.8.2. Régime non saturé

Le domaine est défini par :

$$4.23 \quad |e_n| \frac{1 - \frac{1}{r} e^{\frac{1}{mt_1}} \left[1 + |e_n| (m-1) \right]}{\frac{|e_n|}{e^{\frac{1}{t_1}} - 1}} < a < |e_n| \frac{1 + \frac{1}{r} e^{\frac{1}{mt_1}} \left[1 + |e_n| (m-1) \right]}{\frac{|e_n|}{e^{\frac{1}{t_1}} - 1}}$$

comme précédemment une décomposition en éléments simples au voisinage de l'origine et de l'unité rend commode la détermination de l'allure du domaine.

a) à l'origine :

$$4.24 \quad t_1 \left[1 - \frac{e^{\frac{1}{mt_1}}}{r} \right] + |e_n| \left[-\frac{1}{2} - \frac{e^{\frac{1}{mt_1}}}{r} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right) \right] < a < t_1 \left[1 + \frac{e^{\frac{1}{mt_1}}}{r} \right] + |e_n| \left[-\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{1}{mt_1}}}{r} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right) \right]$$

et l'on pose : $a'_0 = t_1 \left[1 - \frac{e^{\frac{1}{mt_1}}}{r} \right]$ positif si $r > \frac{1}{e^{\frac{1}{mt_1}}}$

$$a''_0 = t_1 \left[1 + \frac{e^{\frac{1}{mt_1}}}{r} \right] < a_0 \text{ déjà défini}$$

b) au voisinage de l'unité

$$a > \frac{e^{-\frac{1}{t_1}} - \frac{1}{r}}{1 - e^{-\frac{1}{t_1}}} + (|e_n| - 1) \frac{mt_1(1 - e^{-\frac{1}{t_1}})(e^{-\frac{1}{t_1}} - \frac{1}{r}) - \frac{e^{-\frac{1}{t_1}}}{r} [1 - m(1 - r)] + \frac{1}{r}}{1 - e^{-\frac{1}{t_1}}}$$

4.25

$$a < \frac{e^{-\frac{1}{t_1}} + \frac{1}{r}}{1 - e^{-\frac{1}{t_1}}} + (|e_n| - 1) \frac{mt_1(1 - e^{-\frac{1}{t_1}})(e^{-\frac{1}{t_1}} + \frac{1}{r}) + \frac{e^{-\frac{1}{t_1}}}{r} [1 - m(1 + r)] - \frac{1}{r}}{mt_1(1 - e^{-\frac{1}{t_1}})^2}$$

expression où l'on retrouve les gains a'_1 et a''_1

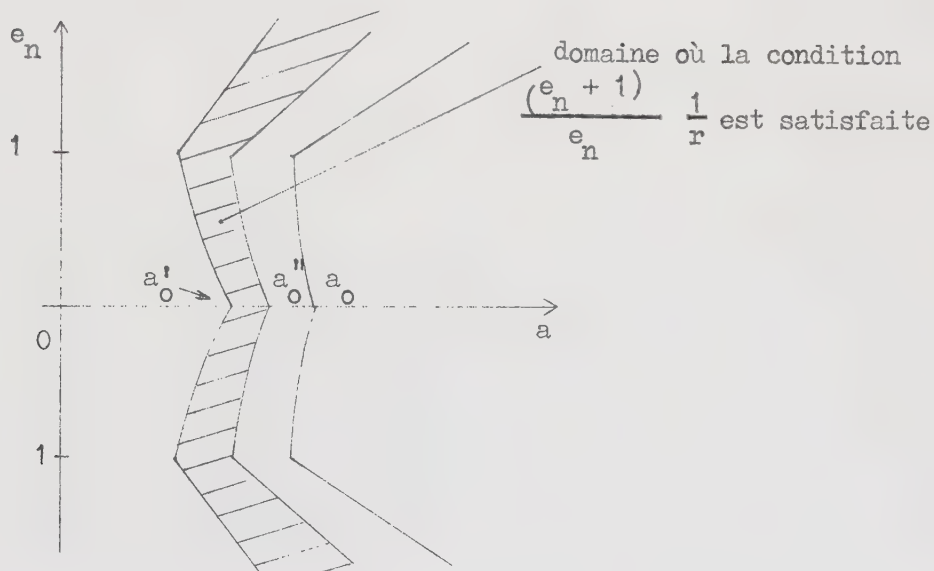


fig. 4.9

Si le temps de réponse désiré αT_e diminue, les limites du domaine se rapprochent et pour un même gain réduit à l'amplitude permise de l'erreur diminue.

Remarquons que lorsque r est grand (faible temps de réponse) le domaine se réduit à la courbe :

$$a = \frac{\frac{|e_n|}{e}}{t_1 - 1} \quad \text{en régime non saturé}$$

4.26

$$a = \frac{\frac{|e_n|}{e}}{\frac{1}{t_1} - 1} \quad \text{en régime saturé}$$

Courbe dont l'allure est représentée sur la figure 4.10

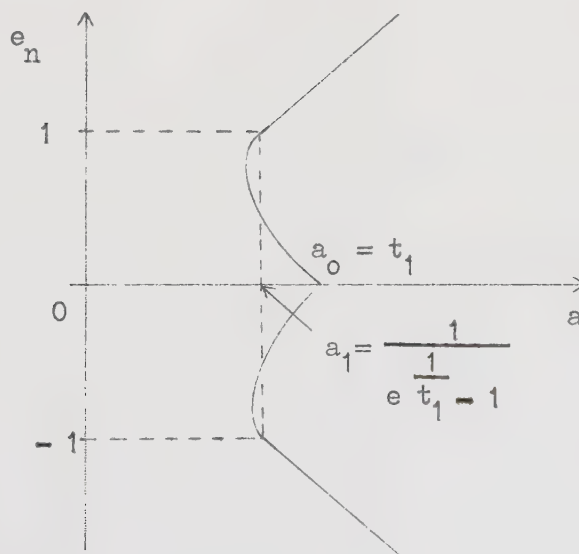


fig. 4.10

Cette courbe peut être utilisée pour définir un domaine suffisant assurant la condition $r|e_{n+1}| < |e_n|$. En effet si l'on minore

$e^{\frac{1}{mt_1} \left[1 + |e_n| (m-1) \right]}$ par $e^{\min \left[\frac{1}{t_1}, \frac{1}{mt_1} \right]}$ le domaine est défini par :

$$4.27 \quad \frac{\frac{|e_n|}{e^{\frac{1}{t_1} - 1}}}{\left[1 - \frac{e^{\min \left[\frac{1}{t_1}, \frac{1}{mt_1} \right]}}{r} \right]} < a < \frac{\frac{|e_n|}{e^{\frac{1}{t_1} - 1}}}{\left[1 + \frac{e^{\min \left[\frac{1}{t_1}, \frac{1}{mt_1} \right]}}{r} \right]}$$

Les frontières de ce domaine se déduisent aisément de la courbe de la figure 4.10 au moyen de deux affinités horizontales.

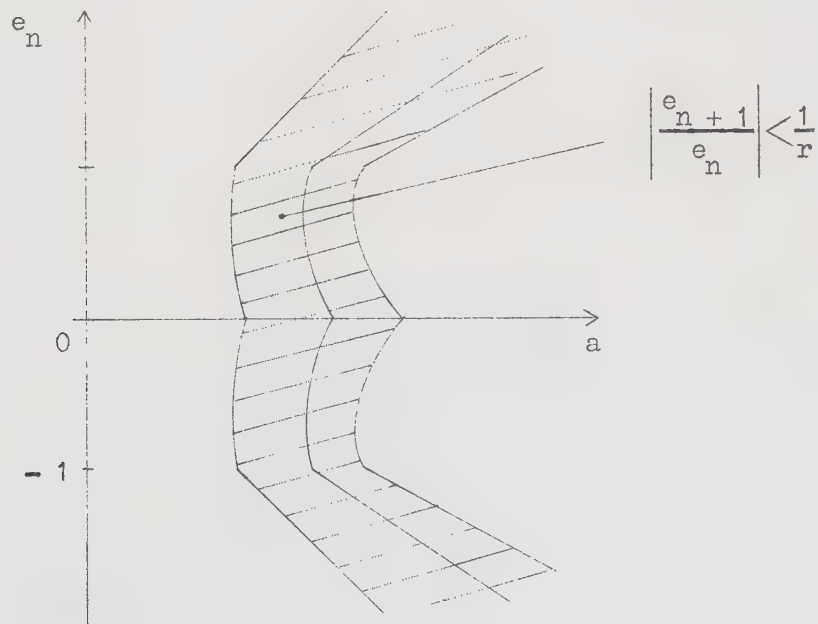


fig. 4.11

4.9. CONCLUSION

Les résultats présentés dans ce chapitre serrent de très près la réalité. Les domaines de stabilité obtenus correspondent exactement à la condition de décroissance uniforme du module de l'erreur échantillonnée. L'étude de la stabilité avec entrée et du temps de réponse est menée de façon plus approchée mais permet néanmoins de juger du régime dynamique en fonction des paramètres.

CHAPITRE V

Analyse des systèmes du second ordre avec intégration

5.1. INTRODUCTION

La commande des moteurs à courant continu au moyen de relais fait apparaître des régimes transitoires différents à la charge et à la décharge. L'étude du comportement dynamique des systèmes du second ordre avec intégration constitue l'objet de ce chapitre.

Après un bref rappel de la représentation utilisée et le choix des variables réduites, l'étude de la stabilité et du temps de réponse dans le plan du paramètre sera effectuée grâce aux deux méthodes présentées dans le chapitre trois.

5.2. RAPPEL DE LA REPRESENTATION UTILISEE

Le système étudié est représenté par le schéma de la figure 5.1 :

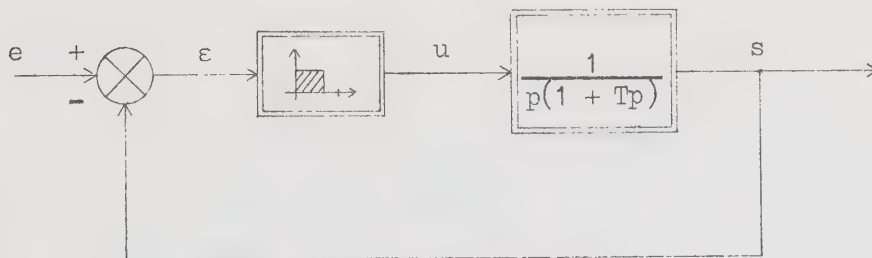


fig. 5.1.

Le modulateur délivre des impulsions calibrées de durée T_{in} proportionnelle au module de l'erreur échantillonnée (cf. expression 4.3) et d'amplitude $A \text{ sig } \epsilon_n$. T_e est la période d'échantillonnage. La constante de temps T est fonction du signal de commande par la loi :

$$5.1 \quad \begin{aligned} T &= T_1 & \text{si } u &\neq 0 \\ T &= T_2 & \text{si } u &= 0 \end{aligned}$$

5.3. MISE EN EQUATION

Les variables d'états utilisées sont les variables de phase s et s' . La mise en équation se fait en deux temps suivant la valeur du niveau de commande u :

$$0 \leq t \leq T_{in} \quad s'_{nT_e+t} = s'_{nT_e} e^{-\frac{t}{T_1}} + A \text{ sig } \epsilon_n (1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

$$s_{nT_e+t} = s_{nT_e} + s'_{nT_e} T_1 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) + A \text{ sig } \epsilon_n (t - T_1 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}))$$

5.2.

$$T_{in} \leq t \leq T_e \quad s'_{nT_e+t} = s'_{nT_e+T_{in}} e^{-\frac{t-T_{in}}{T_2}}$$

$$s_{nT_e+t} = s_{nT_e+T_{in}} + s'_{nT_e+T_{in}} T_2 \left(1 - e^{-\frac{t-T_{in}}{T_2}}\right)$$

Les équations caractérisant l'évolution du filtre en fonction des conditions initiales et de la valeur de l'erreur échantillonnée sont :

$$s_{n+1} = s_n + s'_n \left[T_1 \left(1 - e^{-\frac{T_{in}}{T_1}}\right) + T_2 e^{-\frac{T_{in}}{T_1}} \left(1 - e^{-\frac{T_e - T_{in}}{T_2}}\right) \right]$$

$$+ A \operatorname{sig} \varepsilon_n \left[T_{in} - T_1 \left(1 - e^{-\frac{T_{in}}{T_1}}\right) + T_2 \left(1 - e^{-\frac{T_{in}}{T_1}}\right) \left(1 - e^{-\frac{T_e - T_{in}}{T_2}}\right) \right]$$

$$s'_{n+1} = s'_n e^{-\frac{T_{in}}{T_1}} e^{-\frac{T_e - T_{in}}{T_2}} + A \operatorname{sig} \varepsilon_n \left(1 - e^{-\frac{T_{in}}{T_1}}\right) e^{-\frac{T_e - T_{in}}{T_2}}$$

On constate que l'évolution des conditions initiales est fonction de l'erreur.

A ces équations vient s'ajouter celle de la chaîne de retour

5.4 $\varepsilon_n = e_n - s_n$

Lorsque l'entrée est constante ($e_n = e$) les équations se réduisent aux deux équations (5.5, 5.6) régissant l'évolution du système bouclé :

a) En régime non saturé : $|\epsilon_n| < \epsilon_0, \quad T_{in} < T_e$

ϵ_0 seuil de saturation du modulateur.

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} = \epsilon_n - s'_n & \left[T_1 \left(1 - e^{-\frac{T_{in}}{T_1}} \right) + T_2 e^{-\frac{T_{in}}{T_1}} \left(1 - e^{-\frac{T_e - T_{in}}{T_2}} \right) \right] \\ - A \operatorname{sig} \epsilon_n & \left[T_{in} - T_1 \left(1 - e^{-\frac{T_{in}}{T_1}} \right) + T_2 \left(1 - e^{-\frac{T_{in}}{T_1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{T_e - T_{in}}{T_2}} \right) \right] \end{aligned}$$

5.5.

$$s'_{n+1} = s'_n e^{-\frac{T_{in}}{T_1}} e^{-\frac{T_e - T_{in}}{T_2}} + A \operatorname{sig} \epsilon_n \left(1 - e^{-\frac{T_{in}}{T_1}} \right) e^{-\frac{T_e - T_{in}}{T_2}}$$

b) En régime saturé $|\epsilon_n| > \epsilon_0, \quad T_{in} = T_e$

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n - s'_n T_1 \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T_1}} \right) - A \operatorname{sig} \epsilon_n T_e - T_1 \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T_1}} \right)$$

5.6

$$s'_{n+1} = s'_n e^{-\frac{T_e}{T_1}} + A \operatorname{sig} \epsilon_n \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T_1}} \right)$$

Il est aisé de constater que dans les équations du régime non saturé interviennent cinq paramètres : T_1, T_2, T_e, A et ϵ_0 .

5.4 CHOIX DES VARIABLES REDUITES

Il est possible de diminuer le grand nombre de paramètres de ce système en s'affranchissant de la période d'échantillonnage T_e et du seuil de saturation ε_0 du modulateur par le choix des variables réduites suivantes :

$$x_n = \frac{s_n - e_n}{\varepsilon_0} = - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0}$$

$$y_n = \frac{s'_n T_e}{\varepsilon_0}$$

5.7

$$a = \frac{A T_e}{\varepsilon_0}$$

$$t_1 = \frac{T_1}{T_e}$$

$$m = \frac{T_2}{T_1}$$

Les équations régissant l'évolution du système bouclé se réduisent alors à :

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n y_n$$

5.8

$$y_{n+1} = c_n x_n + d_n y_n$$

a_n, b_n, c_n, d_n fonctions univoques de $|x_n|$

a) En régime saturé $|x_n| > 1$

$$a_n = 1 - \frac{a}{|x_n|} \left[1 - t_1 \left(1 - e^{-\frac{1}{t_1}} \right) \right]$$

$$b_n = t_1 \left(1 - e^{-\frac{1}{t_1}} \right)$$

$$c_n = -\frac{a}{|x_n|} \left(1 - e^{-\frac{1}{t_1}} \right)$$

$$d_n = e^{-\frac{1}{t_1}}$$

5.9

b) En régime non saturé $|x_n| < 1$

$$a_n = 1 - a + \frac{a t_1}{|x_n|} \left(1 - e^{-\frac{|x_n|}{t_1}} \right) \left[1 - m \left(1 - e^{-\frac{1 - |x_n|}{m t_1}} \right) \right]$$

$$b_n = t_1 \left[1 - e^{-\frac{|x_n|}{t_1}} + m e^{-\frac{|x_n|}{t_1}} \left(1 - e^{-\frac{1 - |x_n|}{m t_1}} \right) \right]$$

5.10

$$c_n = -\frac{a}{|x_n|} \left(1 - e^{-\frac{|x_n|}{t_1}} \right) e^{-\frac{1 - |x_n|}{m t_1}}$$

$$d_n = e^{-\frac{1}{m t_1}} \left[1 + |x_n| (m - 1) \right]$$

5.5. ETUDE DE LA STABILITE

L'étude de stabilité présentée est divisée en deux étapes : étude dans le plan des paramètres (a, t_1, mt_1) de la stabilité locale en linéarisant le système, étude dans le même plan de la stabilité illimitée au moyen de la première des méthodes exposées au chapitre trois. La comparaison des domaines trouvés permet de conclure sur les valeurs des paramètres utilisables.

5.5.1. Etude de la stabilité locale

Dans un voisinage de l'origine les équations du système peuvent être linéarisées et l'on peut faire une étude rigoureuse de la stabilité du point d'équilibre.

Il est aisé de calculer, lorsque l'erreur est petite, les coefficients

$$a_n \# 1 - am \left(1 - e^{-\frac{1}{mt_1}} \right)$$

$$b_n \# mt_1 \left(1 - e^{-\frac{1}{mt_1}} \right)$$

$$c_n \# -\frac{a}{t_1} e^{-\frac{1}{mt_1}}$$

$$d_n \# e^{-\frac{1}{mt_1}}$$

La stabilité est assurée si le module des valeurs propres de la matrice régissant l'évolution du système est inférieur à 1. Le polynôme

caractéristique s'écrit, si s est une valeur propre :

$$s^2 - f_1 s + f_2 = 0$$

avec :

$$f_1 = -1 - e^{-\frac{1}{mt_1}} - am \left(1 - e^{-\frac{1}{mt_1}} \right)$$

5.12

$$f_2 = e^{-\frac{1}{mt_1}}$$

L'écriture des conditions : $1 - f_2 > 0$ toujours vérifiée, $1 + f_1 + f_2 > 0$ toujours vérifiée, et $1 - f_1 + f_2 > 0$ entraîne :

$$5.13 \quad a < \frac{2}{m} \frac{1 + e^{-\frac{1}{mt_1}}}{1 - e^{-\frac{1}{mt_1}}}$$

qui se traduit dans le plan $\left[aX = \frac{a}{t_1}, \quad Y = \frac{1}{mt_1} \right]$ par la région :

$$aX < 2Y \frac{1 + e^{-Y}}{1 - e^{-Y}}$$

(voir planche II)

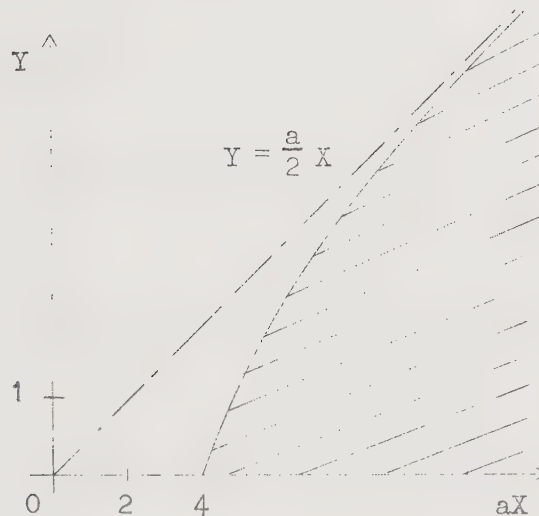


fig. 5.2

5.5.2. Etude de la stabilité illimitée par la norme "somme des modules"

5.5.2.1. Choix de la norme

L'évolution du filtre entre les instants d'échantillonnage est caractérisée, si l'on ne tient pas compte de la régulation, par deux équations linéaires :

$$nT_e < t < nT_e + T_{in} \quad x_{nT_e+t} + t_1 y_{nT_e+t} = c^{te}$$

5.14

$$nT_e + T_{in} < t < (n+1)T_e \quad x_{nT_e+t} + mt_1 y_{nT_e+t} = c^{te}$$

Cette évolution permet de choisir pour norme :

$$5.15 \quad \left| x_n \right| + f(m, t_1) \left| y_n \right|$$

avec $f(m, t_1) = \begin{cases} t_1 & \text{si } m < 1 \\ mt_1 & \text{si } m > 1 \end{cases}$

Ce qui conduit à l'application du critère exposé au paragraphe 3.4 sous la forme :

$$5.16 \quad \frac{\left| b_n \right|}{f(m, t_1)} + \left| d_n \right| \leq 1$$

$$\left| a_n \right| + f(m, t_1) \left| c_n \right| < 1$$

5.5.2.2. ~~Stabilité dans le plan des paramètres~~

L'étude qui suit est effectuée en plusieurs étapes et consiste à imposer aux conditions 5.16 d'être vérifiées quel que soit $\left| x_n \right|$.

Les calculs longs et difficiles seront développés dans l'annexe III, indiquons brièvement la marche de la démonstration :

a) Dans le cas $f(m, t_1) = mt_1$, la condition $\frac{\left| b_n \right|}{mt_1} + \left| d_n \right| \leq 1$ conduit à : $m \geq 1$.

La condition $\left| a_n \right| + mt_1 \left| c_n \right| < 1$ se scinde, compte tenu du signe de c_n , en deux :

$$a_n < 1 + mt_1 c_n$$

5.17

$$a_n > -1 - mt_1 c_n$$

l'étude du maximum de $a_n - mt_1 c_n$ (A III 1.1) et sa comparaison à 1 donne dans le plan $(X = \frac{1}{t_1}, Y = \frac{1}{mt_1})$ un domaine :

$$5.18 \quad Y > \frac{X(1 - e^{-X})}{X + e^{-X} - 1}$$

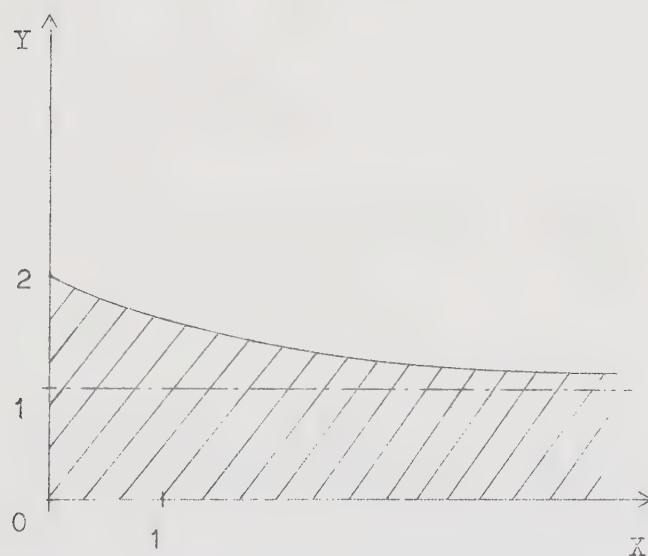


fig. 5.3

L'étude du minimum de $a_n + m t_1 c_n$ (A III 1.2) conduit à la condition simple :

$$5.19 \quad Y > \frac{a}{2} X$$

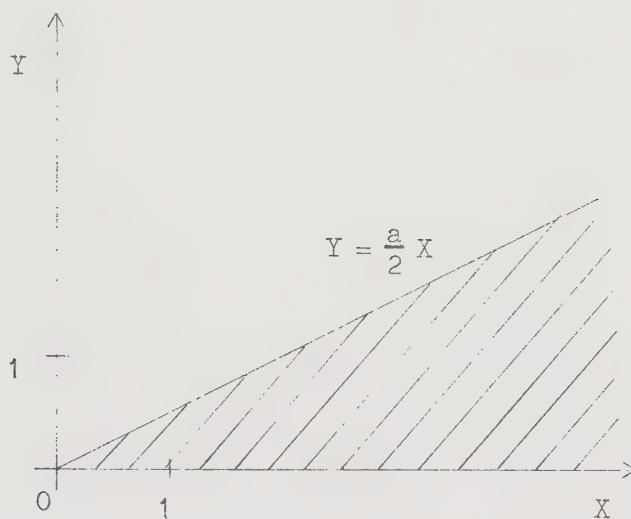


fig. 5.4

et comme $m > 1$ le domaine de stabilité illimité dans le plan des paramètres se réduit à :

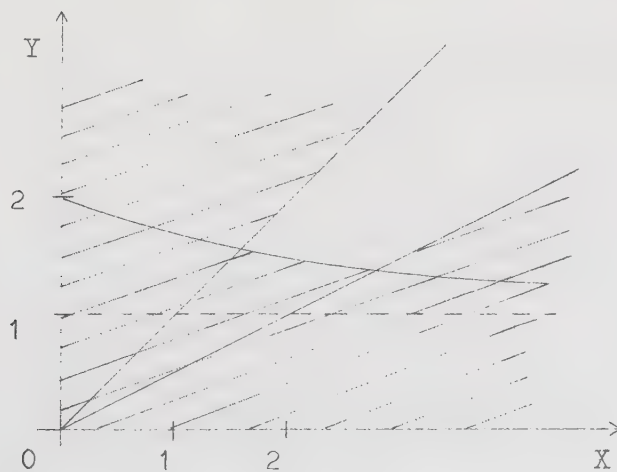


fig. 5.5

il apparaît clairement la condition : $a < 2$, $X > 1,6$

b) Dans le cas $f(m, t_1) = t_1$ la condition $\frac{|b_n|}{t_1} + |d_n| \leq 1$ conduit à $m \leq 1$ (cf. Annexe III).

La condition $|a_n| + t_1 |c_n| < 1$ conduit à $X > 1,6$ et $a < 2$

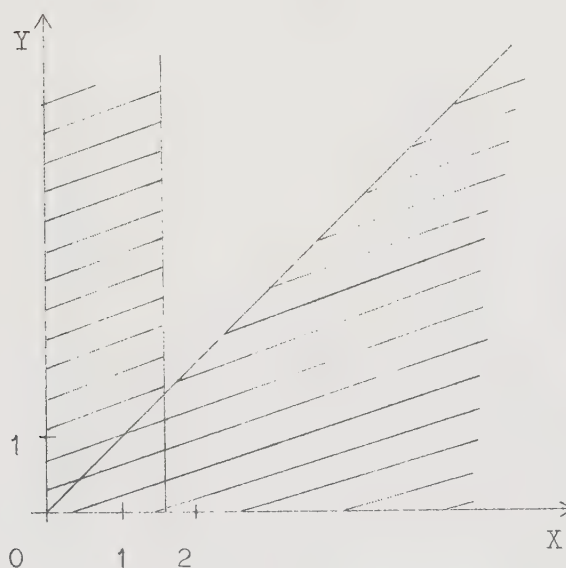
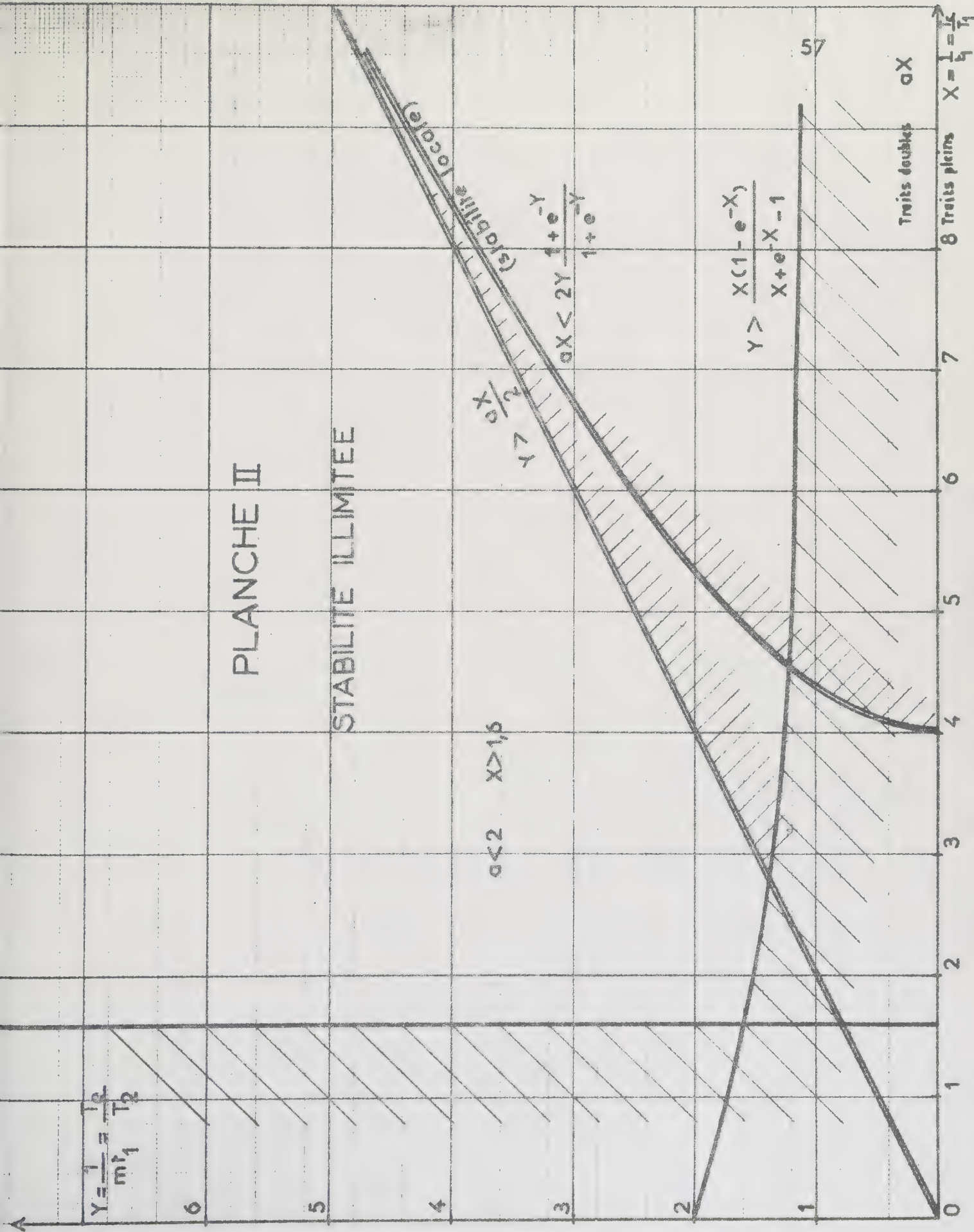


fig. 5.6

Il est alors possible de réunir les domaines de stabilité illimitée trouvés précédemment (voir planche II).

REMARQUE : On peut vérifier, ce qui était évident à priori, que le domaine de stabilité illimitée trouvé est situé à l'intérieur du domaine de stabilité locale.



5.6. ETUDE DU REGIME DYNAMIQUE

Il est intéressant de connaître le régime transitoire d'un système échantillonné donné. La méthode exposée dans le chapitre trois permet de faire cette étude et de trouver les contraintes sur les paramètres conduisant à un temps de réponse bref et un comportement sans dépassement.

Le domaine conduisant à un temps de réponse αT_e à $\beta\%$ près (défini par $\lambda^\alpha \leq \beta / 100$) et à un comportement sans dépassement est décrit, lorsque x_n est positif, par (3.17)

$$\begin{aligned} & -u_n x_n < y_n < -v_n x_n \\ \text{avec} \quad & u_n \leq \frac{a_n}{b_n} \quad \text{et} \quad v_n \geq -\frac{\lambda - a_n}{b_n} \end{aligned}$$

Ce domaine existe si les conditions énoncées au paragraphe 3.6 sont satisfaites :

$$b_n > 0, \quad d_n > 0 \text{ toujours vraies}$$

$a_n d_n - b_n c_n > 0$ vrai d'après le signe de c_n d'autre part a_n doit être positif.

La fonction $u(|x_n|)$, positive décroissante, répond à :

$$5.20 \quad u_n^2 b_n + (d_n - a_n) u_n - c_n > 0$$

Le coefficient c_n est négatif, u_n existe donc si :

$$p = a_n - d_n \text{ est positif}$$

5.21

$$q = (a_n - d_n)^2 - 4 b_n c_n \text{ est positif}$$

conditions qui doivent être satisfaites à l'origine

$$p(0) = (1 - e^{-\frac{1}{mt_1}})(1 - am) > 0 \text{ soit } am < 1$$

5.22

$$q(0) = (1 - e^{-\frac{1}{mt_1}})^2 (1 - am)^2 - e^{-\frac{1}{mt_1}} (1 + am)^2 > 0$$

$$\text{soit } am < \frac{1 - e^{-\frac{1}{2mt_1}}}{1 + e^{-\frac{1}{2mt_1}}}$$

ce qui dans le plan $\left[X = \frac{1}{t_1}, Y = \frac{1}{mt_1} \right]$ correspond au domaine :

5.23 $aX < Y \leq \frac{Y}{4}$, $Y > aX$ toujours vérifié grâce à la première condition.

L'existence de la fonction $v(|x_n|)$ est entraînée par l'existence de u_n .

Cherchons l'ensemble des valeurs des paramètres tel que le domaine existe pour tout x_n .

Les conditions d'existence ne sont pas des fonctions monotones de $|x_n|$ et leur discussion conduit à des équations transcendantes impossibles à résoudre en tenant compte des paramètres. Nous ferons l'hypothèse que si ces conditions sont vérifiées à l'origine et à l'unité, elles seront vérifiées ou presque vérifiées pour $0 < |x_n| < 1$

$$p(1) > 0 \quad \text{devient} \quad a < \frac{1 - e^{-\frac{1}{t_1}}}{1 - t_1(1 - e^{-\frac{1}{t_1}})}$$

5.24

$$q(1) > 0 \quad \text{devient dans le plan } [X, Y] :$$

$$a < \frac{X(1 - e^{-X})}{X - 1 + e^{-X}} \quad \frac{X - \sqrt{(1 - e^{-X})(2X - 1 + e^{-X})}}{X - 1 + e^{-X}}$$

cette relation vérifiant la précédente.

La réunion des contraintes trouvées pour $x_n = 0$ et $|x_n| = 1$ donne la condition simple $a < 1$ et dans les plans de paramètres $\left[\frac{1}{t_1}, \frac{1}{mt_1}\right]$ et $\left[a, \frac{1}{t_1}\right]$ les domaines représentés à la planche III.

5.7. CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis d'appliquer les deux méthodes exposées au chapitre trois et de trouver les valeurs de paramètres conférant aux systèmes étudiés la stabilité illimité ou un comportement dynamique sans dépassement.

On constate aisément que les résultats présentés dans les planches II et III diffèrent et que les domaines obtenus ne conduisent pas aux mêmes valeurs de paramètres.

On peut cependant affirmer que de deux systèmes à constante T_1 identique, le plus difficile à stabiliser sera celui ayant la constante T_2 la plus grande.

Le chapitre suivant, tout en nous permettant de vérifier ces résultats, nous montrera des méthodes d'obtention des domaines de stabilité asymptotique limitée, lorsque les paramètres sont choisis dans la zone hachurée de la planche II, et des domaines assurant la convergence uniforme de l'erreur.

$$Y = \frac{1}{m l_1} = \frac{T_e}{T_2}$$

OBTENTION des DOMAINES

$$0 < x_{n+1} < \lambda x_n$$

$$aX < Y \ln \frac{Y}{4}$$

PLANCHE III

Plan $[aX, Y]$ Plan $[X, a]$

$$X = \frac{1}{l_1} = \frac{T_e}{T_1}$$

$$a = \frac{AT_e}{\epsilon_0}$$

C H A P I T R E VI

Simulation et tracé des domaines de stabilité

6.1. INTRODUCTION

La puissance apportée par les moyens de calcul modernes permet d'effectuer rapidement les vérifications nécessaires à la suite d'une longue étude théorique mêlée de calculs compliqués.

L'utilisation d'un calculateur analogique à logique annexe incorporée dans la simulation des processus échantillonnés conduit grâce à la souplesse de ce type d'appareil à des résultats très précis et d'une grande fiabilité.

Le présent chapitre a pour but d'exposer des méthodes permettant d'obtenir automatiquement les divers domaines de stabilité ou de temps de réponse étudiés dans les pages précédentes.

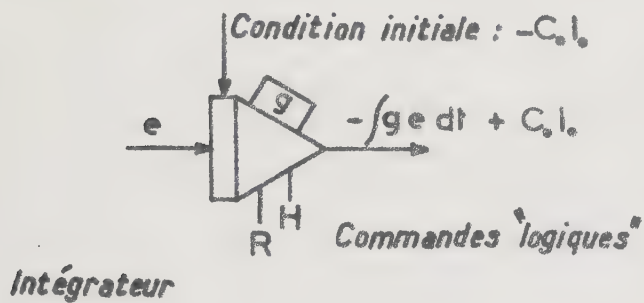
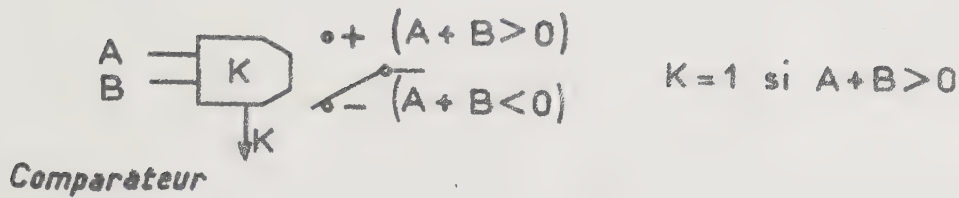
Après un rapide exposé de la simulation du système modulateur-filtre, trois méthodes de tracé automatique seront présentées.

6.2. PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

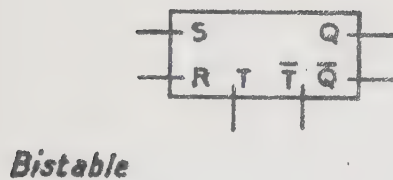
Les éléments tels que sommateur, relais et porte "Nand" ne seront pas décrits. Le fonctionnement des comparateurs et des bistables est exposé sur la planche IV ainsi que le symbolisme relatif aux intégrateurs.

SYMBOLES UTILISES et HORLOGES "MACHINE"

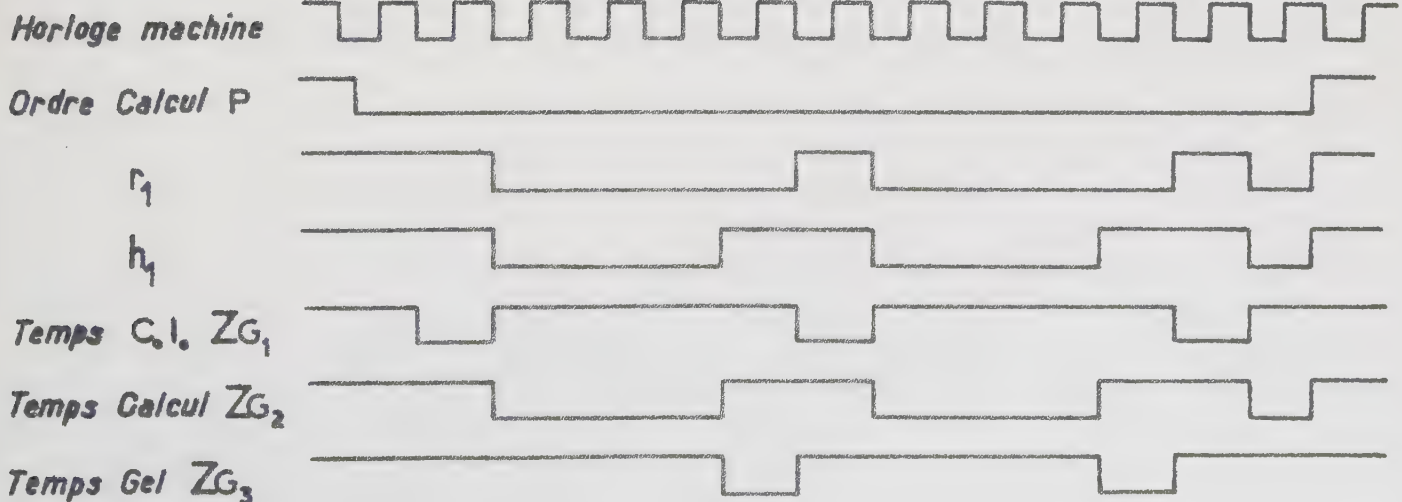
PLANCHE IV



	$C_0 I$	Calcul	Gel
R	1	0	0
H	1	0	1



	$T = \bar{T} = 1/0$				$T=1/0$	$\bar{T}=1/0$
S	1	0	1	0	Q	Q
R	1	1	0	0	$\bar{Q}$	$\bar{Q}$
Q_{n+1}	Q_n	0	1	$\bar{Q}_n$	1	0



Sur la planche IV, nous avons également représenté différentes horloges fournies par la machine et utilisées dans les simulations présentées.

6.3. SIMULATION DES SYSTEMES ETUDIES

Les simulations des systèmes de premier ordre et du second ordre sont identiques et l'on trouve dans les planches V et VI le détail des parties logiques et analogiques de ces systèmes. La simulation est décomposable en trois ensembles :

- le modulateur
- le filtre et la commutation des constantes de temps
- les commandes logiques et la génération du temps calcul itératif.

6.3.1. Modulateur [14]

Le modulateur délivre à chaque période d'échantillonnage un signal d'amplitude $A \sin \varepsilon_n$ aisément obtenu qui est interrompu lorsque le niveau d'une rampe élaborée dès le début de la période atteint la valeur de l'erreur échantillonnée, le temps qui s'écoule entre l'instant d'échantillonnage et l'interruption de la commande est alors proportionnel au module de l'erreur échantillonnée.

6.3.2. Filtre

Le schéma de la partie premier ordre du filtre est classique et permet le changement de constante de temps sans modification de la condition initiale ni du gain statique.

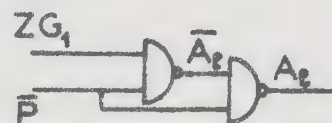
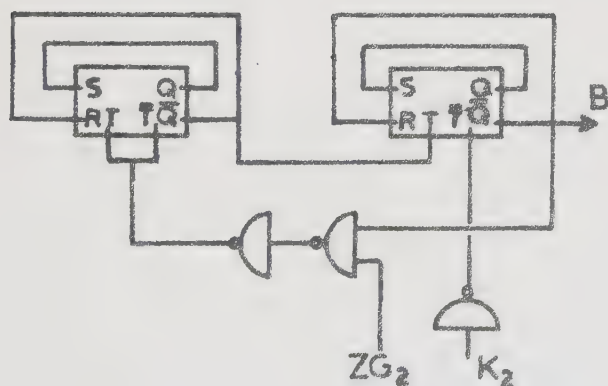
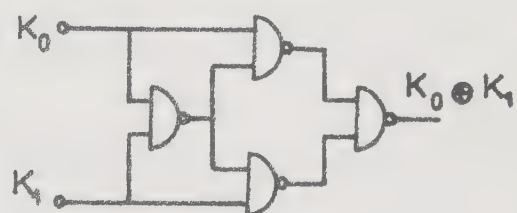
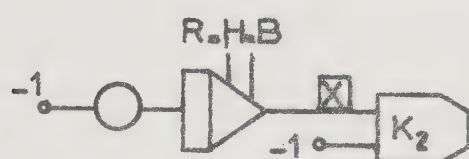
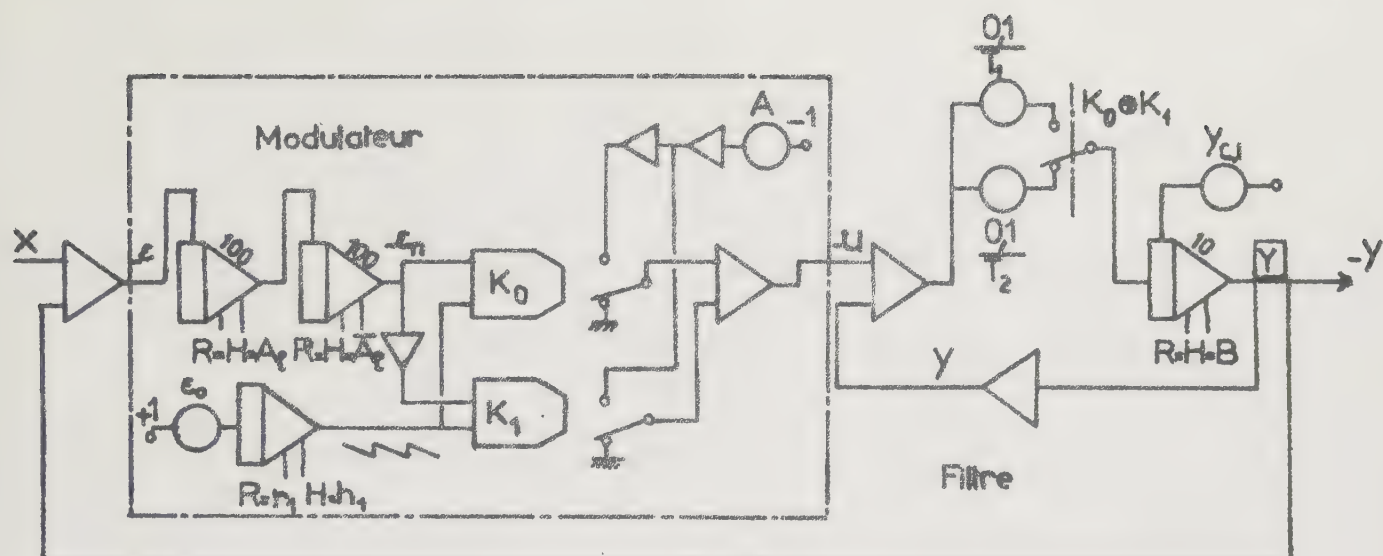


PLANCHE V

Simulation du filtre du premier ordre, du modulateur
et de la partie logique

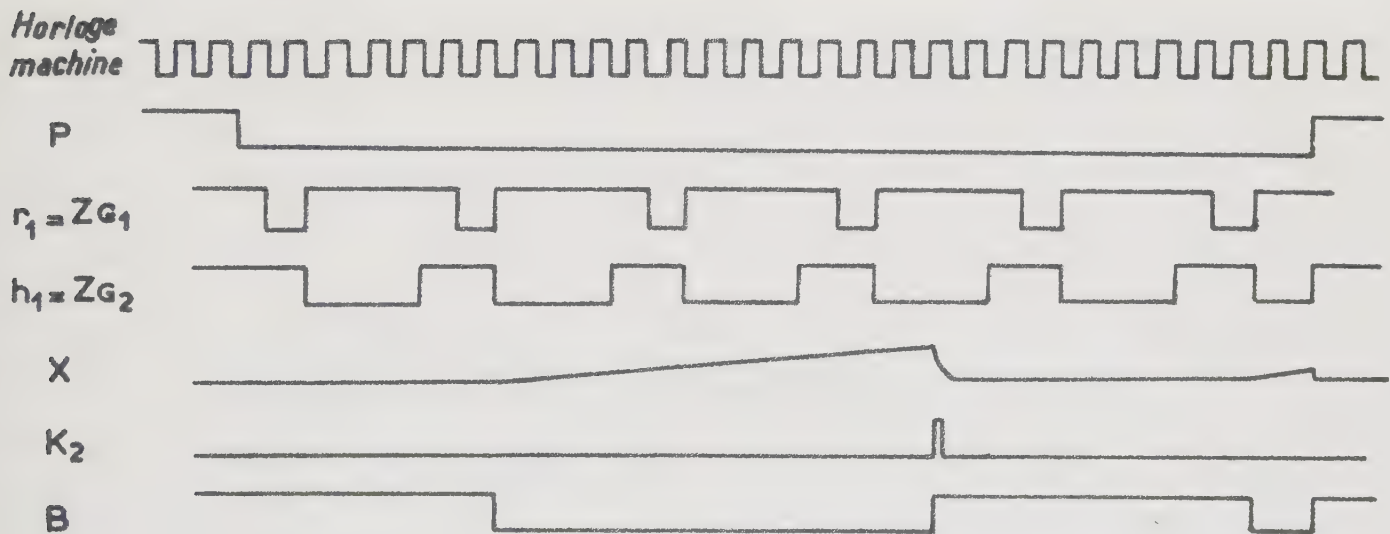
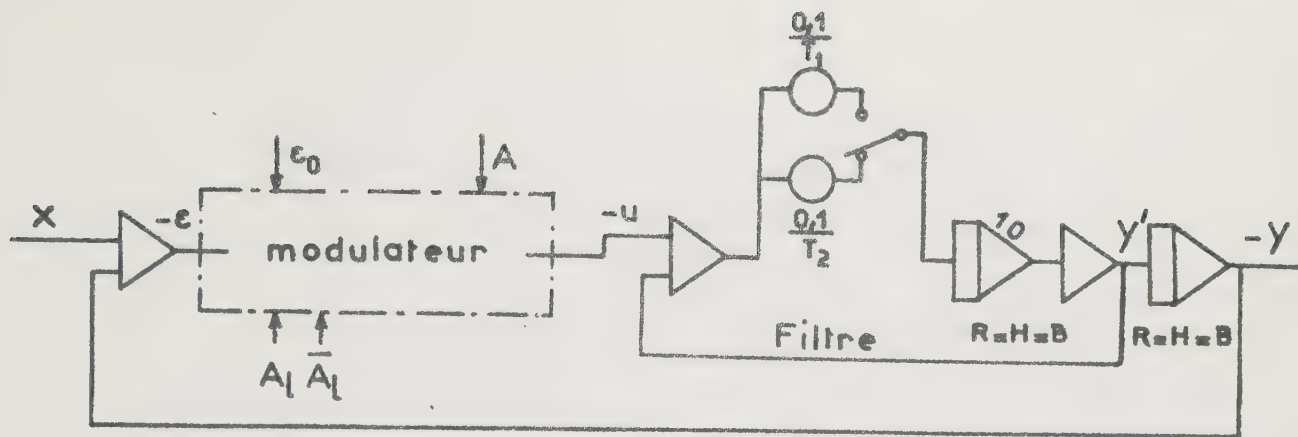


PLANCHE VI

Simulation des systèmes du second ordre

Diagramme des temps

La commutation des constantes de temps utilise un signal tiré de l'état logique du modulateur.

6.3.3. Partie logique

Elle est utilisée pour élaborer un signal de commande de durée variable synchrone des instants d'échantillonnage . Le montage met en oeuvre un intégrateur élaborant une rampe de pente réglable remis à zéro lorsque sa sortie atteint l'unité machine ; la durée de la dent de scie obtenue est variable, quelques fonctions logiques rendent le début de cette dent de scie synchrone des instants d'échantillonnage et laissent un temps de mise en conditions initiales suffisant.

6.4. TRACE AUTOMATIQUE DES DOMAINES DE STABILITE DU PREMIER ORDRE

6.4.1. Méthode utilisée

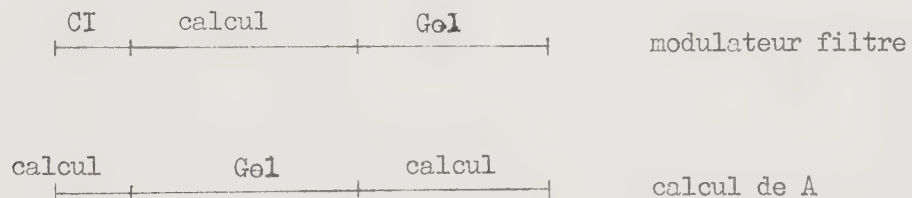
La frontière des domaines de stabilité étudiés dans le chapitre IV est caractérisée par la propriété $|e_{n+1}| = |e_n|$. Le tracé de cette frontière est aisé lorsqu'ayant choisi la valeur des paramètres $t_1 = \frac{T_1}{T_e}$ et $m = \frac{T_2}{T_1}$ on peut trouver la valeur de $a = \frac{A}{\varepsilon_0}$ qui donne $|e_{n+1}| = |e_n|$.
(rappel : $e_n = \frac{n}{\varepsilon_0}$).

Le système de recherche utilisé est à double cadence [15]. Le tracé de la courbe s'effectue en faisant varier la condition initiale ε_n lentement devant la période du cycle de recherche.

La recherche de A tel que $|\varepsilon_{n+1}| = |\varepsilon_n|$ comporte deux phases :

- test : erreur ε_n positive, condition initiale - ε_n , calcul de ε_{n+1}

- recherche : la valeur de A est obtenue par intégration de la différence $|\varepsilon_{n+1}| - |\varepsilon_n|$:



Le schéma analogique et logique est représenté planche VII.

REMARQUE :

On utilise la propriété du domaine de stabilité : la région $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$ est située à gauche de la région $|\varepsilon_{n+1}| > |\varepsilon_n|$ il suffit donc d'ajouter aux valeurs de A des quantités proportionnelles à $|\varepsilon_n| - |\varepsilon_{n+1}|$. Si l'on ne tient pas compte du temps de test le système se réduit au système suivant :

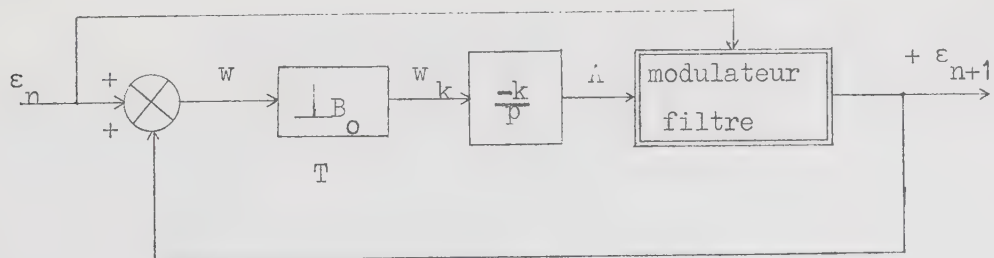


fig. 6.2

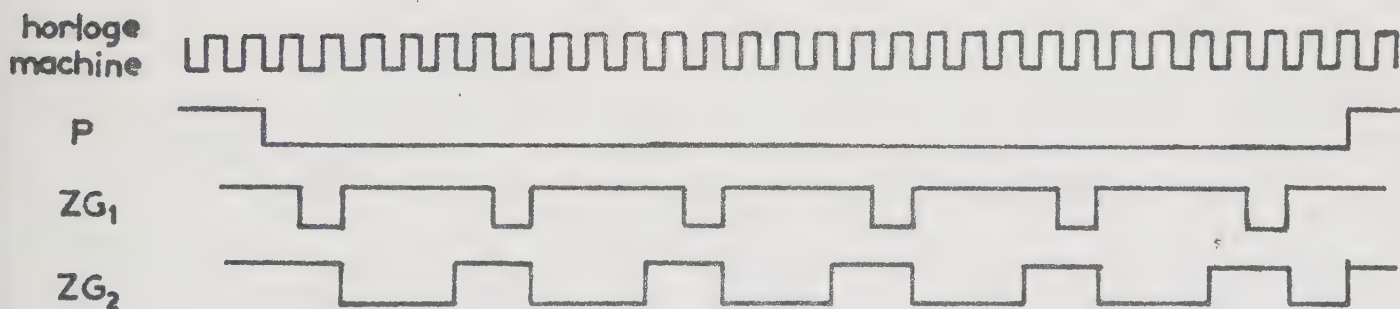
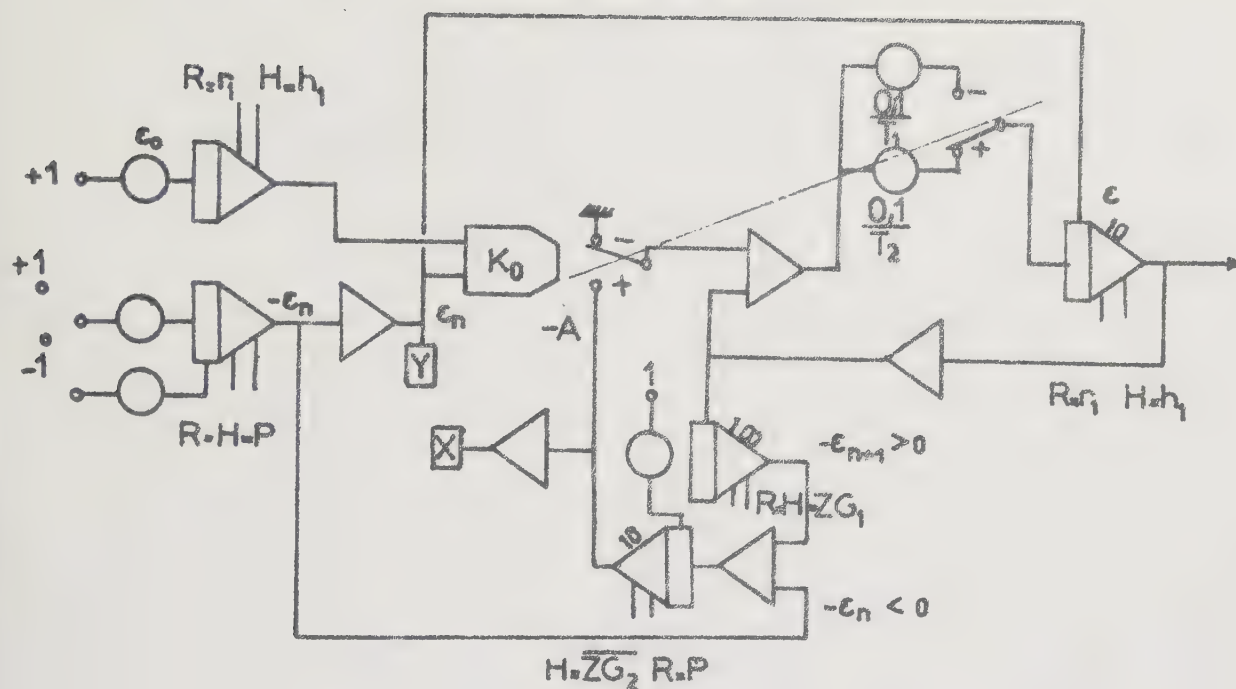


PLANCHE VII

Tracé automatique de la région $\left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| < 1$ pour

les systèmes du premier ordre

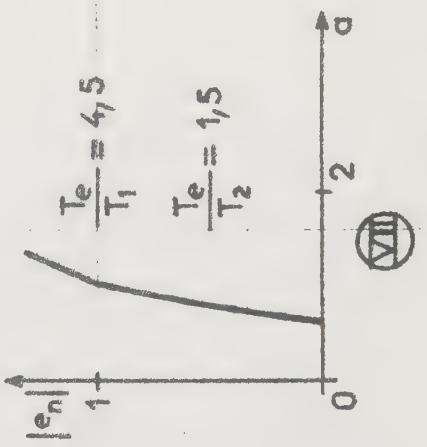
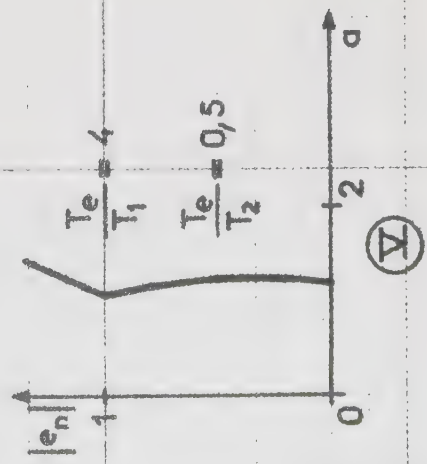
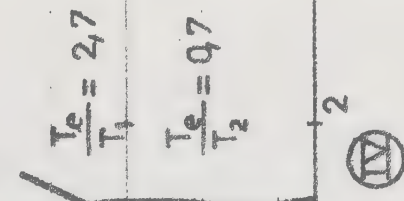
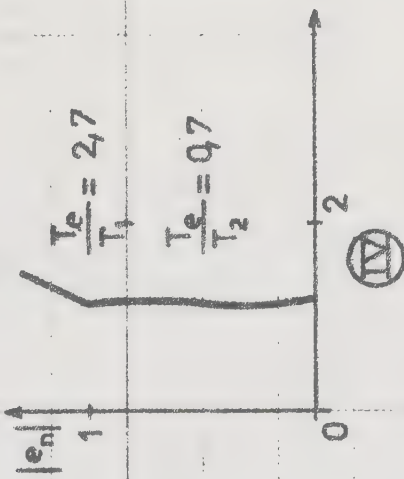
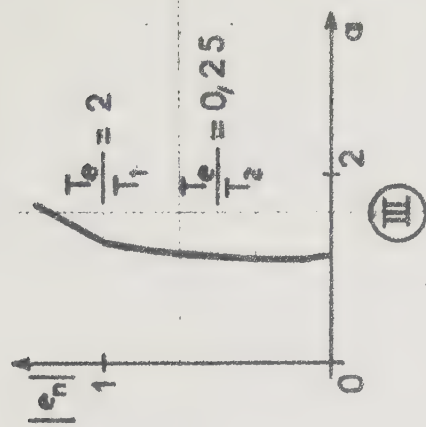
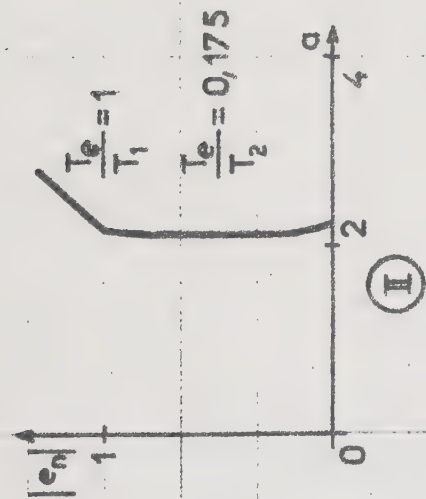
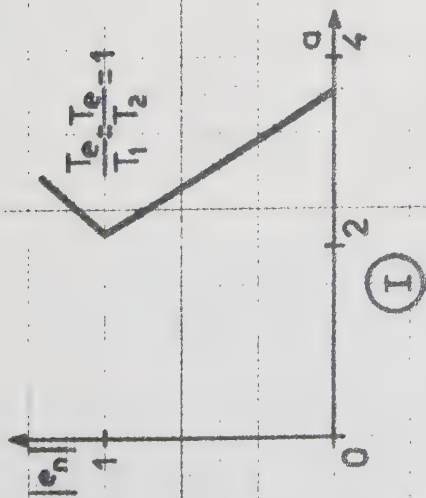


PLANCHE VIII

DOMAINES $\left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| < 1$

Remarquons que la solution $|\epsilon_{n+1}| = |\epsilon_n|$ n'existe pas donc pour ϵ_n positif on sait que ϵ_{n+1} est négatif et l'on a :

$$A_{k+1} = A_k - KT \left[\epsilon_{n, k} + \epsilon_{n+1, k} \right]$$

avec T temps d'intégration et k indice de la séquence de recherche de A. La convergence de l'équation 6.1 et sa stabilité sont étudiées dans l'annexe IV à partir du schéma de la figure 6.2. Indiquons, toutefois, que le gain limite KT de la recherche est donné par la condition :

$$6.2 \quad 0 < KT < \frac{2}{(1 - e^{-\frac{|e_n|}{t_1}}) e^{-\frac{1 - |e_n|}{mt_1}}}$$

6.4.2. Résultats obtenus

Le tracé d'une courbe est effectué en quelques minutes avec une très grande précision.

Sur la planche VIII, nous avons représenté sept exemples correspondant aux valeurs de paramètres définies au chapitre quatre et permettant une excellente vérification des allures prévues.

6.5. TRACE AUTOMATIQUE DES DOMAINES ASSURANT LA DECROISSANCE DE LA NORME CHOISIE (Planche IX)

La norme choisie est

$$6.3 \quad \|X_n\| = |x_n| + f(m, t_1) |y_n|$$

avec

$$f(m, t_1) = \sup (t_1, mt_1).$$

Le tracé est effectué pour x_n positif en faisant varier lentement la valeur de y_n et en cherchant la valeur de x_n annulant la décroissance de la norme. Le terme de correction utilisé est la variation de la norme. A la séquence de recherche k on peut écrire :

$$6.4 \quad x_{n, k+1} = x_{n, k} + K \left(\|X_{n, k}\| - \|X_{n+1, k}\| \right)$$

Le domaine total correspondant à la décroissance de la norme est obtenue par symétrie par rapport à l'axe oy_n .

Ce domaine constitue un domaine de stabilité par rapport aux valeurs des variables, c'est-à-dire un domaine dans lequel le point représentatif de l'état X_n doit rester pour assurer la convergence vers l'origine.

Le domaine de stabilité des conditions initiales est donné par l'intérieur de la plus grande surface $\|X_n\| < c^{te}$ contenue dans la région ci-dessus.

Sur la planche X, nous avons représenté trois exemples de domaines. Les paramètres sont choisis à l'extérieur de l'ensemble de paramètres conduisant à la stabilité illimitée et proposé à la planche II.

Cette simulation permet de vérifier très rapidement les domaines de stabilité des systèmes échantillonnés non linéaires en général et s'étend aisément aux normes de type quadratique.

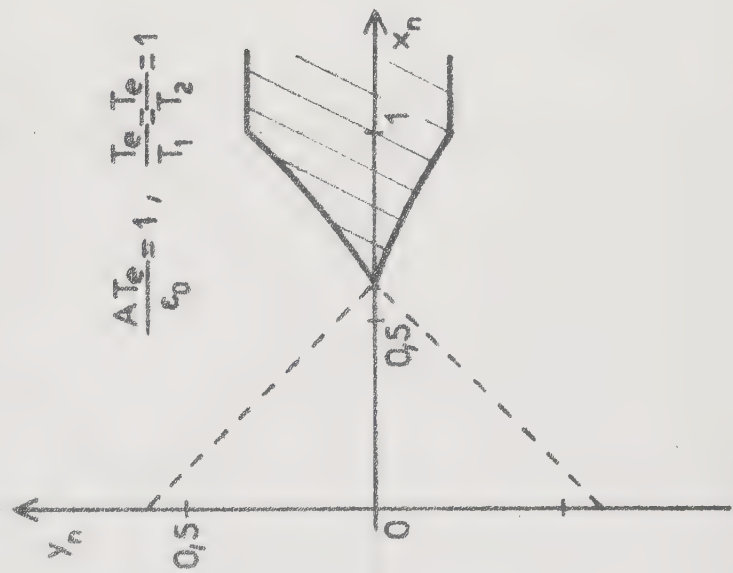
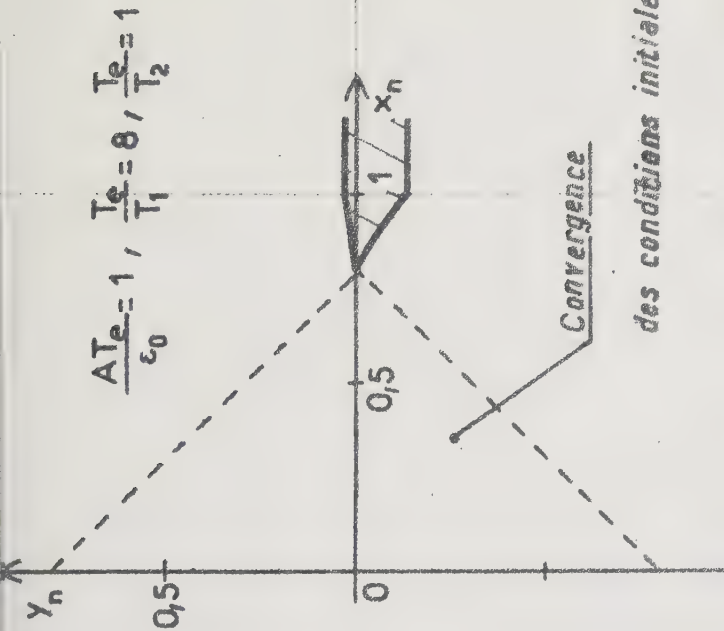
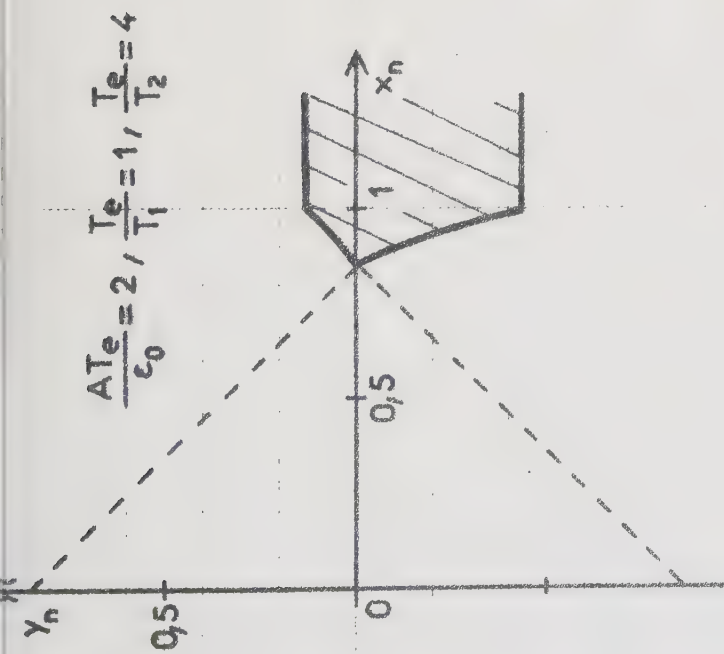


PLANCHE X

EXEMPLES de DOMAINES

$$\|X_{n+1}\| < \|X_n\|$$

6.6. TRACE AUTOMATIQUE DES DOMAINES ASSURANT UN REGIME DYNAMIQUE FIXE

6.6.1. Méthode utilisée

La recherche dans le plan des variables de phase ($x_n > 0, y_n$) de la région R ($0 < x_{n+1} < \lambda x_n$) ne pose guère de problème ; on l'obtient par un balayage lent de la variable x_n et une correction de y_n utilisant la différence $x_{n+1} - \lambda x_n$.

Le tracé du domaine $D \subset R$ utilise une propriété du comportement des systèmes du second ordre dans le plan d'extension en phase :

On peut montrer qu'il existe, sous certaines conditions, des lignes du plan de phase caractérisées par la propriété suivante :

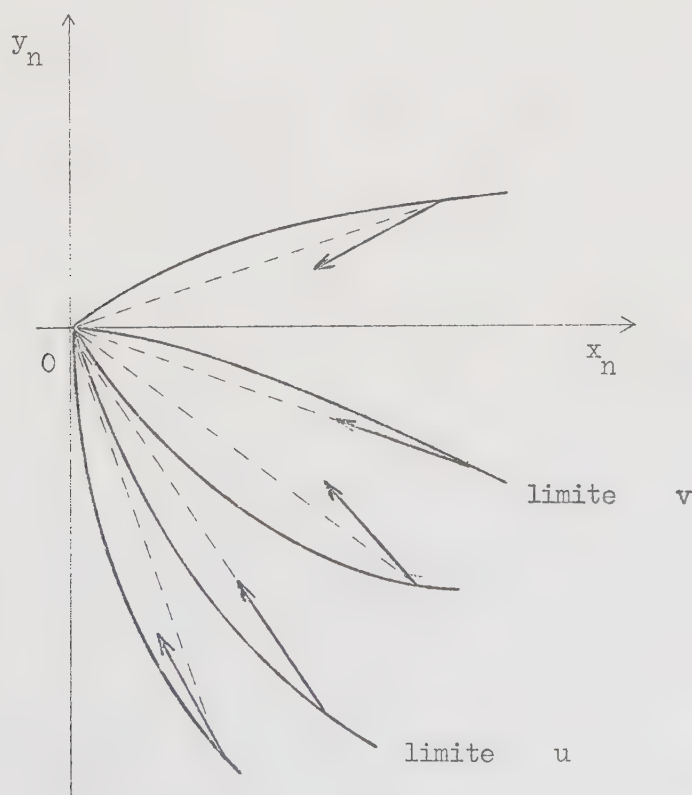


fig. 6.3

Dans la région x_n positif, il existe deux courbes :

$$y_n = -u_n(x_n) x_n \text{ et } y_n = -v_n(x_n) x_n \text{ telles que}$$

si $y_n \in [-u_n x_n, -v_n x_n]$

6.5

$$\text{alors } y_{n+1} > y_n \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \text{si } x_{n+1} < x_n$$

$$\text{et si } y_n \notin [-u_n x_n, -v_n x_n]$$

$$\text{alors } y_{n+1} < y_n \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \text{si } x_{n+1} < x_n$$

On conçoit qu'un domaine limité par deux courbes :

$$y_n = -\gamma_n x_n \in [-u_n x_n, -v_n x_n] \text{ avec } \gamma_n \text{ fonction décroissante}$$

6.6

$$\text{et } y_n = -\delta_n x_n > -v_n x_n \quad \text{avec } \delta_n \text{ fonction croissante}$$

constitue lorsque x_n décroît un domaine de stabilité des conditions initiales.

Les fonctions u_n et v_n ne sont autres que les racines de l'équation 6.7 déjà rencontrée au chapitre trois :

$$6.7 \quad b_n u_n^2 + (d_n - a_n) u_n - c_n = 0$$

La courbe $u_n x_n$ est tracée en comparant x_{n+1} et $x_n \frac{y_{n+1}}{y_n}$ la différence obtenue entrant comme terme de correction de y_n ; il en est de même avec la courbe $v_n x_n$.

Un balayage de x_n lent devant la convergence de y_n permet de limiter l'erreur de tracé à une valeur acceptable.

Sur la planche XI, nous avons représenté le schéma analogique utilisé.

6.6.2. Résultats obtenus

Sur les planches XII, XIII et XIV, nous donnons des exemples de domaines. Dans chaque cas cinq courbes ont été tracées automatiquement : les frontières de la région $0 < x_{n+1} < \lambda x_n$ pour $\lambda = 1$ et $\lambda = \lambda_1 < 1$, ainsi que les courbes limites $y_n + u_n x_n = 0$ et $y_n + v_n x_n = 0$.

Après examen de la pente apparente des courbes, il est aisé de choisir les domaines à conserver.

On constate que dans tous les cas la frontière $x_{n+1} < x_n$ a une concavité négative et peut être conservée.

Un tracé complet est effectué en une quinzaine de minutes et les valeurs de paramètres utilisées sont choisies dans les domaines représentés à la planche III.

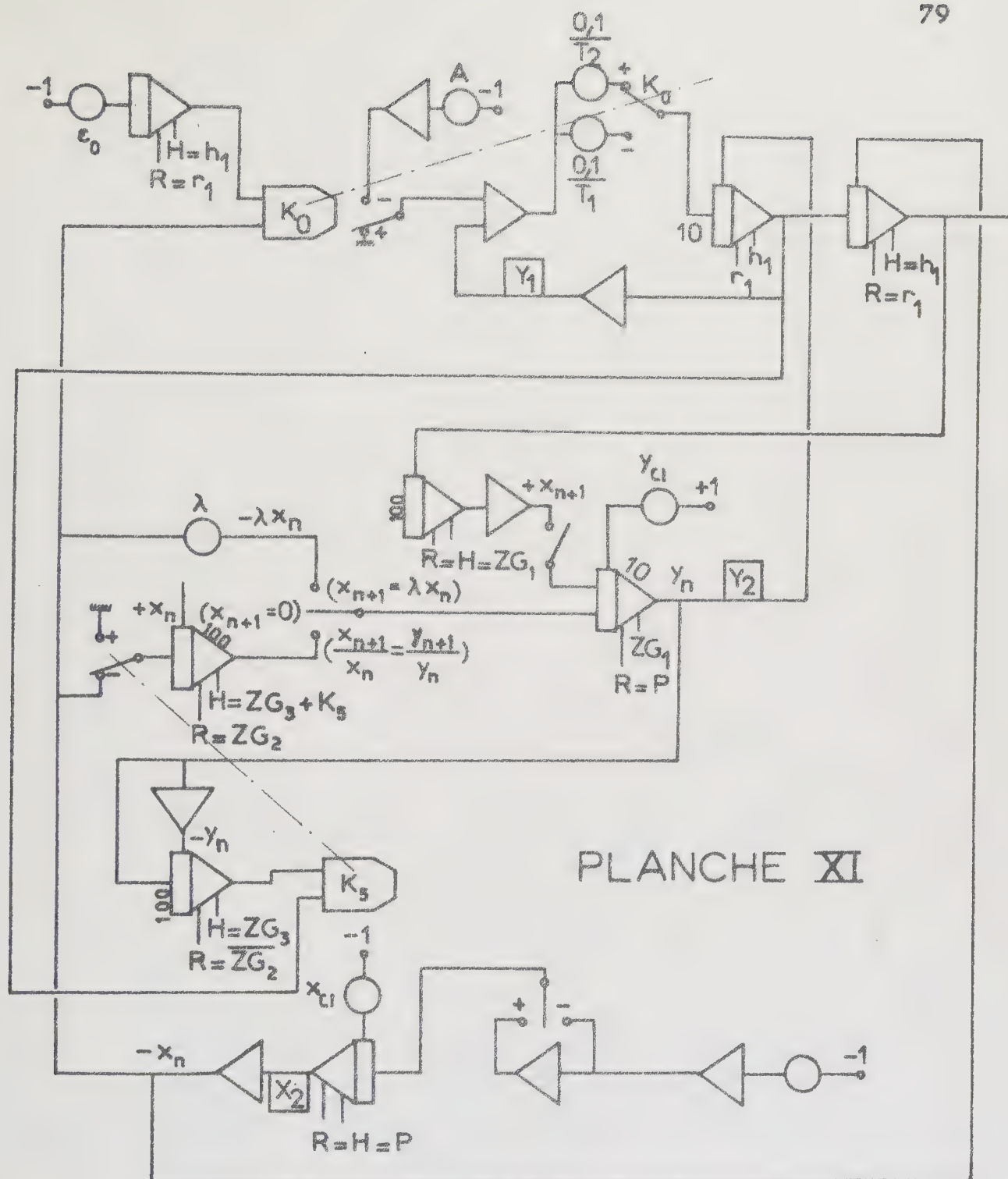
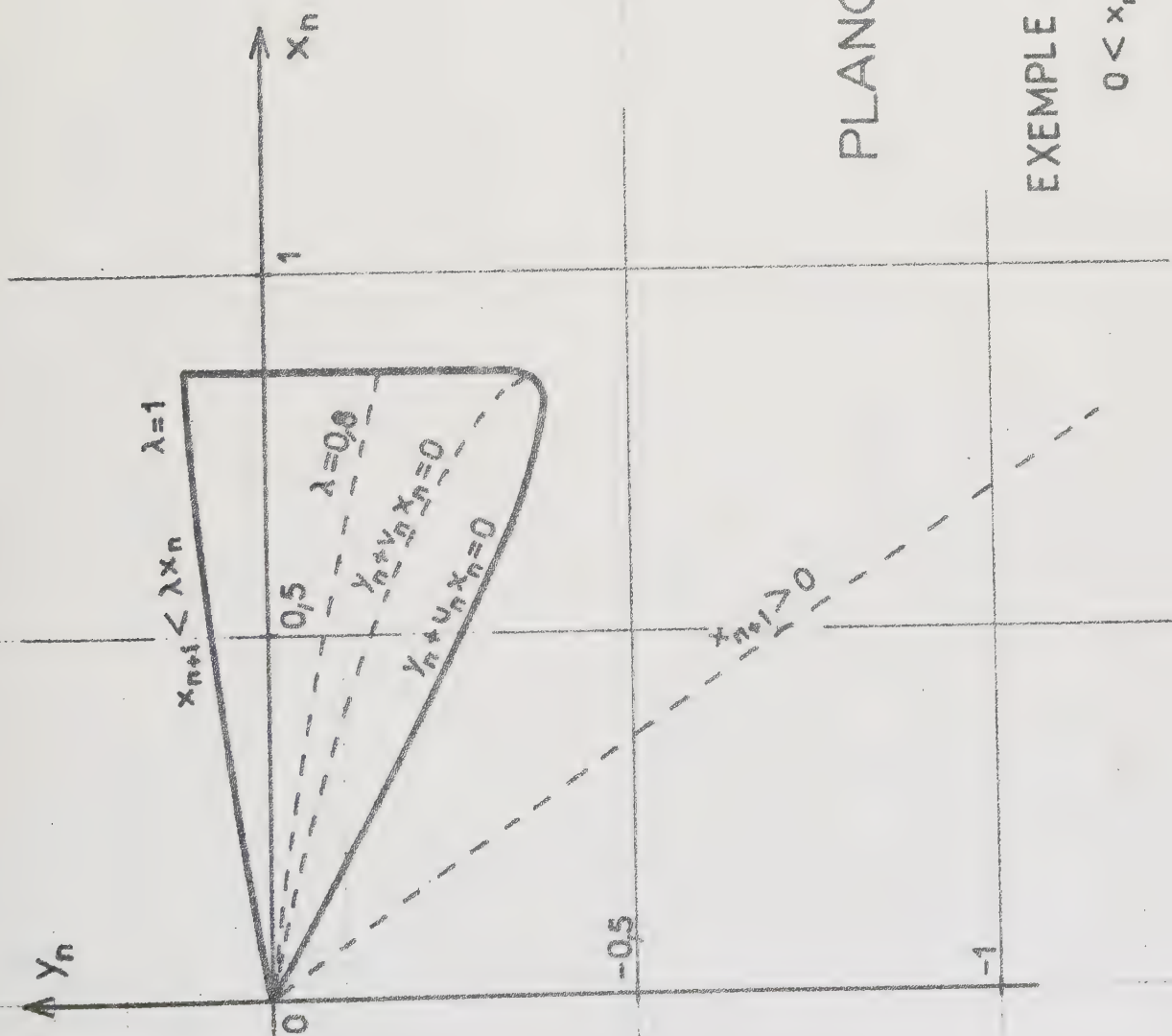


PLANCHE XI

TRACE AUTOMATIQUE
des DOMAINES $0 < x_{n+1} < \lambda x_n$

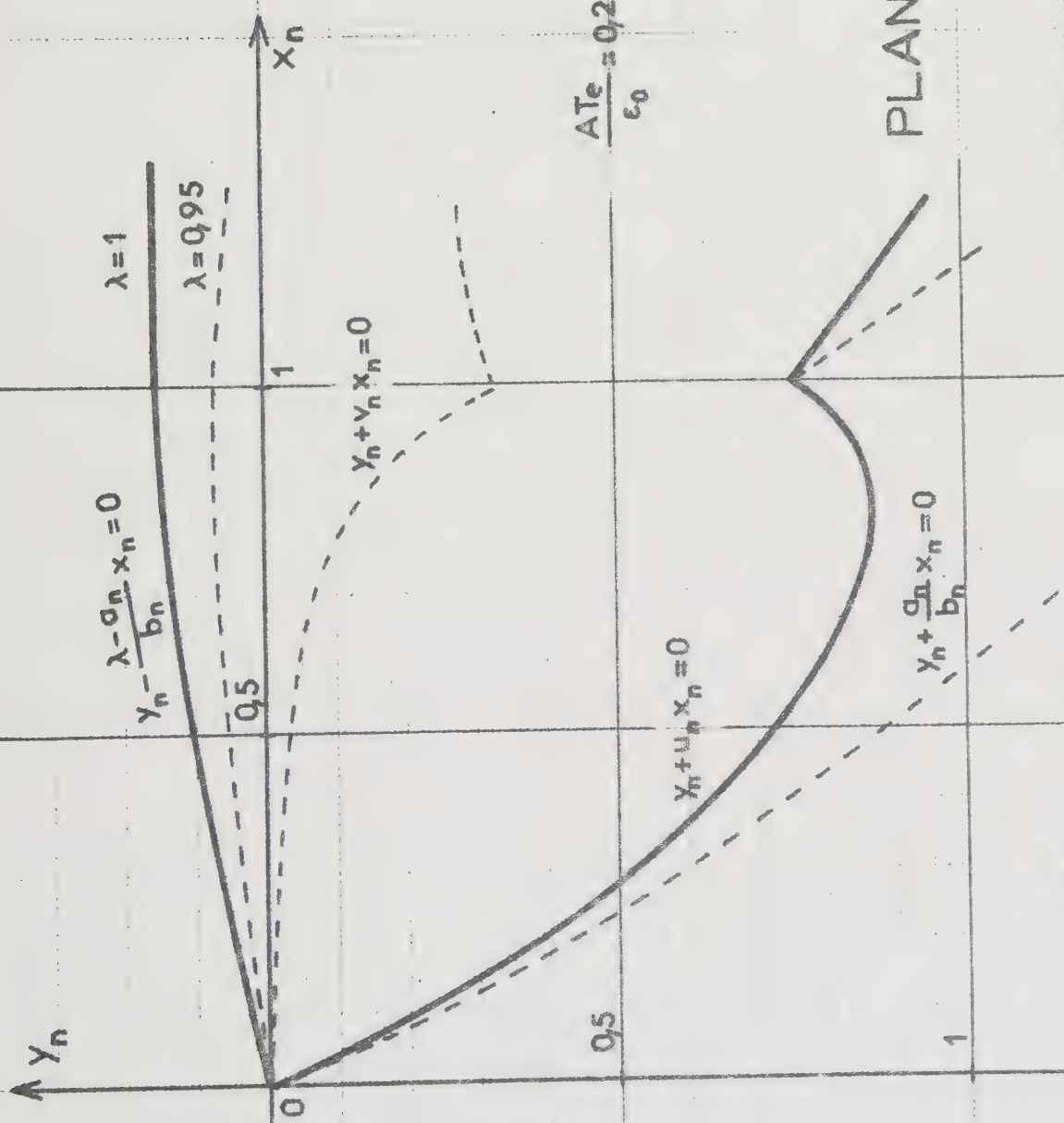


$$\frac{A T_e}{\varepsilon_0} = 0.2 \quad \frac{T_e T_2}{T_1 T_2} = 1$$

PLANCHE XIII

EXEMPLE de DOMAINE

$$0 < x_{n+1} < \lambda x_n$$



$$\frac{ATe}{\epsilon_0} = 0.2 \quad \frac{Te}{T_1} = 1.25 \quad \frac{Te}{T_1} = 3$$

PLANCHE XIV

EXEMPLE de DOMAINE

$$0 < x_{n+1} < \lambda x_n$$

6.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois méthodes d'obtention rapide des domaines de stabilité prévus par le calcul. Ces méthodes constituent en fait un puissant moyen de vérification et un test pour orienter les calculs théoriques.

L'observation du comportement des systèmes sur calculatrice analogique nous a montré que dans chaque cas les domaines de stabilité théoriques n'étaient pas très éloignés des domaines réels et nous a assuré de la validité des calculs.

C O N C L U S I O N G E N E R A L E

Nous avons envisagé la description des systèmes discrets à constante de temps fonction d'un signal de commande de durée variable.

L'utilisation systématique de variables d'état et de paramètres normalisés nous a permis d'aborder l'étude des propriétés dynamiques avec un nombre de paramètres réduit à trois.

L'application, à deux exemples de méthodes adaptées [7] [9] à la classe étudiée, nous a conduit à la discussion des contraintes sur les paramètres.

Les simulations exposées dans le but d'automatiser la mise en oeuvre des méthodes d'analyse de la stabilité permettent d'une part le tracé des domaines de stabilité d'autre part l'obtention des valeurs permises des coefficients qui caractérisent le système étudié.

Nous nous proposons d'étendre l'étude du régime dynamique présentée à des systèmes d'ordre plus élevés et d'envisager les questions de synthèse qui apparaissent encore délicates.

A N N E X E I ---

Démonstrations des conditions 3.20

La relation 3.19 jointe à l'équation 3.1 devient :

$$-u_n a_n x_n - u_n b_n y_n < c_n x_n + d_n y_n < -v_n a_n x_n - v_n b_n y_n$$

condition dont la partie gauche est toujours vérifiée si :

$$2 \quad y_n > -u_n x_n > -\frac{c_n + u_n a_n}{d_n + u_n b_n} x_n \quad \text{avec } u_n > 0 \text{ et } d_n > 0$$

$$3 \quad \text{soit } u_n^2 b_n + (d_n - a_n) u_n - c_n < 0$$

La partie droite amène une discussion suivant le signe de $d_n + v_n b_n$

$$a) \quad d_n + v_n b_n > 0 \quad \text{une condition suffisante est :}$$

$$4 \quad y_n < -v_n x_n < -\frac{c_n + v_n a_n}{d_n + v_n b_n} x_n$$

$$5 \quad \Rightarrow \quad v_n^2 b_n + (d_n - a_n) v_n - c_n > 0$$

$$b) \quad d_n + v_n b_n < 0$$

$$6 \quad -v_n x_n > y_n > -\frac{c_n + v_n a_n}{d_n + v_n b_n} x_n$$

deux nouveaux cas doivent être étudiés.

$$b1) \text{ si } y_n > \frac{d_n}{b_n} x_n$$

alors une condition suffisante est :

$$7 \quad \frac{d_n}{b_n} x_n > - \frac{c_n + v_n a_n}{d_n + v_n b_n}$$

$$\text{soit } 8 \quad v_n < - \frac{d_n^2 + b_n c_n}{b_n (a_n + d_n)} \quad (a_n > 0 \text{ d'après 3.17})$$

toujours vrai si :

$$9 \quad - \frac{d_n}{b_n} < - \frac{d_n^2 + b_n c_n}{b_n (a_n + d_n)} \quad (\text{car } v_n < - \frac{d_n}{b_n})$$

$$10 \quad \text{soit } a_n d_n - b_n c_n > 0$$

$$b2) \text{ si } y_n < \frac{d_n}{b_n} x_n$$

$$\text{l'écriture } 11 \quad y_{n+1} < \frac{d_n}{b_n} x_{n+1}$$

$$\text{impose } 12 \quad y_{n+1} < - v_n x_{n+1}$$

et jointe à l'équation 3.1 donne la condition suffisante $a_n d_n - b_n c_n > 0$ déjà obtenue.

ANNEXE II

Evolution des conditions initiales du premier ordre

Il est aisé de trouver, à partir des domaines définis, une région assurant la stabilité des conditions initiales ; dans le cas II cette région est représentée par la zone hachurée de la figure 1.

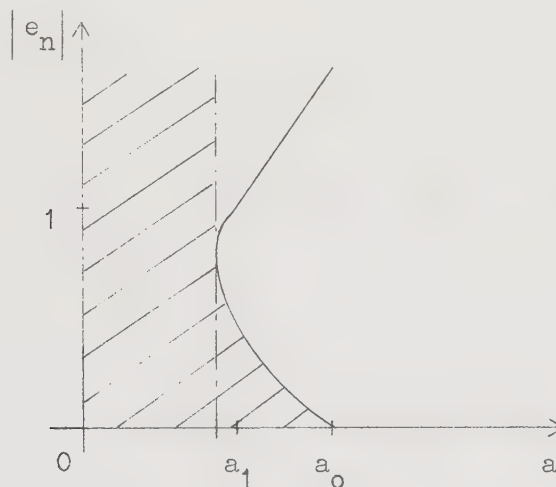


fig. 1

Cette zone constitue un ensemble de conditions initiales telles que l'état final soit l'axe $e_n = 0$.

Il est possible de déterminer d'autres régions assurant la stabilité des conditions initiales en recherchant les antécédents des points de la zone hachurée.

Dans le cas où ces antécédents correspondent au régime non saturé cette recherche est impossible, nous ferons donc l'hypothèse que les antécédents sont situés en régime saturé ($|e_n| > 1$).

L'équation de récurrence est alors :

$$1 \quad e_{n+1} + e_n \left[-e^{-\frac{1}{t_1}} + \frac{a}{|e_n|} (1 - e^{-\frac{1}{t_1}}) \right] = 0$$

lorsque e_n est positif la transformation inverse s'écrit :

$$2 \quad e_n = e_{n+1} e^{\frac{1}{t_1}} + a (e^{\frac{1}{t_1}} - 1)$$

caractéristique d'une affinité verticale à laquelle s'ajoute une translation proportionnelle à l'abscisse.

A N N E X E III ---

Stabilité illimitée du second ordre

A III 1 Cas $f(m, t_1) = mt_1$

La condition $\frac{|b_n|}{mt_1} + |d_n| \leq 1$ s'écrit :

$$1 - (1 - e^{-\frac{|x_n|}{t_1}}) \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \leq 0 \quad \text{soit} \quad m \geq 1$$

A III 1.1 Etude du maximum de $a_n - mt_1 c_n$

En régime non saturé la condition $a_n - mt_1 c_n < 1$ conduit à l'expression :

$$2 \quad g = 1 - \frac{t_1}{|x_n|} (1 - e^{-\frac{|x_n|}{t_1}}) (1 + 2m e^{-\frac{1 - |x_n|}{mt_1}} - m) \geq 0$$

La fonction g doit être positive lorsque $|x_n|$ est nul ou égal à l'unité

$$g(0) = m (1 - 2 e^{-\frac{1}{mt_1}}) > 0$$

$$g(1) = 1 - t_1 (1 - e^{-\frac{1}{t_1}}) (1 + m) > 0$$

ce qui dans le plan $(X = \frac{1}{t_1}, Y = \frac{1}{mt_1})$ est traduit par les deux domaines :

$$Y > \frac{X(1 - e^{-X})}{-X} , \quad Y > 0,693$$

$$X + e^{-X} - 1$$

la seconde condition est toujours vérifiée lorsque la première l'est.
Il reste maintenant à définir le minimum de g , calculons sa dérivée :

$$5 \quad \dot{g} = \frac{dg}{dx_n} = \frac{t_1}{|x_n|^2} \left[\underbrace{\left(1 - e^{-\frac{|x_n|}{t_1}} \right) - \frac{e^{-\frac{|x_n|}{t_1}}}{|x_n|}}_{\text{positif}} \right] \left(1 + 2m e^{-\frac{1 - |x_n|}{mt_1}} - m \right) \dots$$

$$- 2 \frac{1 - e^{-\frac{|x_n|}{t_1}}}{x_n} e^{-\frac{1 - |x_n|}{mt_1}}$$

La dérivée est la différence de deux termes. Lorsque l'expression :
 $1 + 2m e^{-\frac{1 - |x_n|}{mt_1}} - m$ est négative $\dot{g}$ est négatif et le minimum est $g(1)$.
 Lorsque l'expression citée est positive la dérivée peut s'annuler, sa valeur à l'origine est :

$$6 \quad \dot{g}(0) = \frac{e^{-\frac{1}{mt_1}} (2m - 4) - m + 1}{2t_1}$$

$$\dot{g}(0) \text{ est positif lorsque } X > Y - \frac{2e^{-Y}}{1 - 2e^{-Y}} \quad \text{or}$$

la condition $m > 1$ équivaut à $X > 1$ donc $\dot{g}(0)$ est toujours positif.

Il vient :

La fonction $g(|x_n|)$ présente éventuellement un maximum pour $|x_n|$ compris entre zéro et l'unité et la condition 5 entraîne $a_n - mt_1 c_n < 1$ en régime saturé ($|x_n| > 1$) il est clair que $g(|x_n|)$ est positif car pour $|x_n| > 1$ g est une fonction croissante de $|x_n|$.

A III 1.2. Etude du minimum de : $a_n + mt_1 c_n$

L'écriture de $a_n + mt_1 c_n > -1$ entraîne la relation :

$$7 \quad a \left[1 - \frac{t_1}{|x_n|} (1 - e^{-\frac{|x_n|}{t_1}})(1 - m) \right] < 2$$

maximum pour $|x_n| = 0$ c'est-à-dire :

$$am < 2 \quad \text{soit} \quad Y > \frac{a}{2} X$$

A III 2 cas $f(n t_1) = t_1$

La condition $\frac{|b_n|}{t_1} + |d_n| \leq 1$ s'écrit :

$$8 \quad (1 - m) (1 - e^{-\frac{1 - |x_n|}{mt_1}}) \geq 0 \quad \text{soit} \quad m \leq 1$$

A III 2.1. Etude du minimum de $a_n + t_1 c_n$

La condition $a_n + t_1 c_n > -1$ entraîne :

$$9 \quad a \left[1 - \frac{t_1}{|x_n|} (1 - e^{-\frac{|x_n|}{t_1}}) (1 - m) (1 - e^{-\frac{1 - |x_n|}{mt_1}}) \right] < 2$$

maximum pour $|x_n| = 1$. Il vient alors :

$$a < 2$$

A III 2.2. Etude du maximum de $a_n - t_1 c_n$

La condition $a_n - t_1 c_n < 1$ entraîne :

$$10 \quad g = 1 - \frac{t_1}{x_n} (1 - e^{-\frac{x_n}{t_1}}) \left[1 + (m+1) e^{-\frac{1 - |x_n|}{mt_1}} - m \right] > 0$$

La fonction g doit être positive pour $|x_n|$ compris entre zéro et un :

$$g(0) = m - (m+1) e^{-\frac{1}{mt_1}} > 0$$

$$11 \quad g(1) = 1 - 2 t_1 (1 - e^{-\frac{1}{t_1}}) > 0$$

ce qui dans le plan $[X, Y]$ devient

$$X > 1,6, \quad X > Y \frac{e^{-Y}}{1 - e^{-Y}} \text{ toujours vrai si } X > 1,6$$

Le minimum de g s'étudie en examinant le signe de sa dérivée. La dérivée $\dot{g}$ est la différence de deux termes et peut éventuellement s'annuler :

$$\dot{g}(0) = \frac{1}{2t_1} \text{ positive}$$

12

$$\dot{g}(1) = 2(t_1(1 - e^{-\frac{1}{t_1}}) - e^{-\frac{1}{t_1}}) - \frac{m+1}{n} (1 - e^{-\frac{1}{t_1}})$$

négative lorsque : $Y > 2 \frac{1 - e^{-X}}{1 + e^{-X}} - X$ ce qui est toujours vérifié

puisque le second membre est toujours négatif, en effet :

$$e^{-X} > \frac{2 - X}{2 + X}$$

$$\text{car } (1 - X + \frac{X^2}{2}) (2 + X) > 2 - X$$

en régime saturé g reste positif car g est fonction croissante de $\left| x_n \right|$.

A N N E X E IV

Stabilité de la recherche automatique de la région $\left| \frac{e_n + 1}{e_n} \right| < 1$

Le schéma de la figure 6.2 nous a conduit à l'expression

$$1 \quad a_{k+1} = a_k - KT W_k$$

où $W_k = e_{n, k} + e_{n+1, k}$

L'équation liant les valeurs échantillonnées de e est :

$$2 \quad e_{n+1} + e_n e^{-\frac{1 - |e_n|}{mt_1}} \left[-e^{-\frac{|e_n|}{t_1}} + \frac{a}{|e_n|} (1 - e^{-\frac{|e_n|}{t_1}}) \right] = 0$$

Remarquons que la solution $e_{n+1} = e_n$ n'existe pas.

L'utilisation des relations (1) et (2) nous fournit l'équation de récurrence aux erreurs (3), lorsque la grandeur $e_{n, k}$ est constante.

$$3 \quad W_{k+1} - W_k \left[1 - KT \operatorname{sig} e_n e^{-\frac{1 - |e_n|}{mt_1}} (1 - e^{-\frac{|e_n|}{t_1}}) \right] = 0$$

équation dont la stabilité asymptotique est assurée si :

$$4 \quad 0 < KT \operatorname{sig} e_n < \frac{2}{e^{-\frac{1 - |e_n|}{mt_1}} (1 - e^{-\frac{|e_n|}{t_1}})}$$

B I B L I O G R A P H I E

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

- [1] - M. GOUY
On a constant temperature oven
J. Physique, Vol. 6, série 3, p. 479 (1897).
- [2] - STANSEL N.R.
Industrial electric heatings
John Wiley, New York U.S.A., 1933, 43.
- [3] - FREEMAN G.F.
Temperature maxima in intermittent heating-cycles
Engineering 145, (1938).
- [4] - ROOTS W.K., WOODS J.T.
Design parameters for thermal processes with on-off controllers
J. of Inst. of Fuel, 41, p. 5-15, 1968.
- [5] - LAURENT F.
Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique.
Thèse de Doctorat ès Sciences, Mai 1968, Lille.
- [6] - WEGRZYN J., VIDAL P., PALUSINSKI O., LAURENT F.
Contribution de l'algèbre de Banach à l'étude de la stabilité globale des systèmes discrets non linéaires.
Deuxième conférence d'automatique de Bulgarie, Varna, Septembre 1967.
- [7] - WEGRZYN J., GILLE J.C., VIDAL P., PALUSINSKI O.
Stabilité illimitée des systèmes échantillonnés non linéaires dans les espaces métriques.
C.R. Acad. Sc. Paris T. 270, p. 418-421 (Février 1970).

- [8] - KALMAN R.E. et BERTRAM J.E.
Control systems analysis and design via the second method of l'apunov.
Transactions at the A.S.M.S. J. of Bas. Eng., June 1960.
- [9] - DAVID R., SIRET J.M.
Sur le régime dynamique des systèmes échantillonnés non linéaires
C.R. Acad. Sc. Paris (8 juin 1970).
- [10] - VIDAL P.
Systèmes échantillonnés non linéaires
Gordon and Breach, Paris 1968
- [11] - WEGRZYN S., VIDAL P;
Sur la stabilité asymptotique d'une équation non linéaire aux diffé-
rences finies d'ordre n.
C.R. Acad. Sci. Paris, tome 256, p. 2781, (1963).
- [12] - POVY L.
Contribution à l'analyse et à la synthèse des asservissements échantil-
lonnés non linéaires en régime dynamique.
Thèse de Doctorat ès Sciences Lille 1969.
- [13] - MICHAILESCO G.
Etude d'un système à modulation de durée des impulsions et à partie
continue du premier ordre discontinue.
Rapport de stage D.E.A. 1970, L.G.E.P. BP 1 92 - Fontenay-aux-Roses.
- [14] - DAVID R., SIRET J.M.
Simulation hybride de modulateurs non linéaires
Note interne du L.G.E.P. 1970
- [15] - MELIN C., TOULOTTE J.M.
Les machines hybrides
Note interne du L.G.E.P. 1970

TABLE des MATIERES

---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---

	Pages
INTRODUCTION GENERALE	
CHAPITRE I : <u>les actionneurs à modulation de durée des impulsions</u>	
1.1. Introduction.	1
1.2. Définition d'un modulateur de largeur	2
1.3. Exemples de modulateurs	2
1.3.1. Modulation de durée d'impulsions calibrées comman- dée à l'extinction	2
1.3.2. Modulation de durée d'impulsions calibrées comman- dée à l'amorçage	3
1.3.3. Modulation de durée d'arches de sinusoides comman- dée à l'amorçage	4
1.3.4. Modulation de la durée d'une suite d'impulsions. . .	4
1.3.5. Modulation de durée à double signe des impulsions. .	5
1.3.6. Modulation de la durée d'impulsions commandées symé- triement	6
1.3.7. Modulation de durée et d'amplitude des impulsions. .	6
1.4. Conclusion.	7
CHAPITRE II : <u>Description de la classe de systèmes étudiée</u>	
2.1. Introduction.	9
2.2. Description	9
2.3. Exemples.	10

	Pages
2.3.1. Régulation de la température d'un processus thermique.	10
2.3.2. Asservissement de la vitesse d'un moteur à courant continu à flux constant commandé par l'induit. . .	11
2.3.3. Asservissement de la position d'un moteur à courant continu à flux constant commandé par l'induit. . .	12
2.4. Conclusion.	13

CHAPITRE III : Deux méthodes d'étude des systèmes échantillonnés non linéaires

3.1. Introduction.	14
3.2. Stabilité dans les espaces métriques.	14
3.3. Condition de stabilité, norme d'une matrice, contraction. .	15
3.4. Première méthode : Exemple de norme, critère de stabilité .	16
3.5. Intérêt de la norme présentée dans le cas du moteur	17
3.6. Seconde méthode : Analyse du régime dynamique	19
3.7. Conclusion.	21

CHAPITRE IV : Analyse des systèmes du premier ordre.

4.1. Introduction.	22
4.2. Rappel de la représentation utilisée.	22
4.3. Mise en équation.	24
4.3.1. Modulateur non saturé.	24
4.3.2. Modulateur saturé.	25
4.4. Choix de variables normalisées.	25
4.5. Etude de la stabilité asymptotique du régime autonome . . .	26

	Pages
4.5.1. Introduction.	26
4.5.2. Etude en régime saturé.	27
4.5.3. Etude en régime non saturé.	28
4.5.4. Forme des domaines en fonction des paramètres	29
4.5.5. Conclusion.	31
4.6. Etude d'un cas particulier important	33
4.7. Approche algébrique de la stabilité en régime non auto- nome	35
4.8. Etude du temps de réponse.	37
4.8.1. Régime saturé.	37
4.8.2. Régime non saturé	39
4.9. Conclusion.	43

CHAPITRE V : Analyse des systèmes du second ordre avec intégration

5.1. Introduction.	44
5.2. Rappel de la représentation utilisée.	44
5.3. Mise en équation.	45
5.4. Choix des variables réduites.	48
5.5. Etude de la stabilité	50
5.5.1. Etude de la stabilité locale	52
5.5.2. Etude de la stabilité illimitée.	52

	Pages
5.5.2.1. Choix de la norme	52
5.5.2.2. Stabilité illimitée dans le plan des paramètres	53
5.6 Etude du régime dynamique	58
5.7. Conclusion	60
 CHAPITRE VI : <u>Simulation et tracé des domaines de stabilité</u>	
6.1. Introduction	63
6.2. Principaux symboles utilisés	63
6.3. Simulation des systèmes étudiés.	65
6.3.1. Modulateur.	65
6.3.2. Filtre	65
6.3.3. Partie logique.	68
6.4. Tracé automatique des domaines de stabilité du pre- mier ordre	68
6.4.1. Méthode utilisée.	68
6.4.2. Résultats obtenus	72
6.5. Tracé automatique des domaines assurant la décrois- sance de la norme choisie.	72
6.6. Tracé automatique des domaines assurant un régime dynamique fixé.	76

	Pages
6.6.1. Méthode utilisée.	76
6.6.2. Résultats obtenus	78
6.7. Conclusion	83

CONCLUSION GENERALE

ANNEXES

I Démonstration des conditions 3.20.	85
II Evolution des conditions initiales du premier ordre	87
III Stabilité illimitée du second ordre.	89
IV Stabilité de la recherche automatique de la région	
$\left \frac{e_n + 1}{e_n} \right < 1$	95

BIBLIOGRAPHIE

Vu et permis d'imprimer
Paris, le 22 Décembre 1970
La Doyen de la Faculté des Sciences de Paris

L. GAUTHIER

